

VŠB - Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra aplikované mechaniky

Analytické řešení pružné deformace svorky stabilizátoru

Analytic Calculation Method for the Elastic Deformation of  
a Stabilizer Clamp

Student: Ondřej Skoupý

Vedoucí: doc. Ing. Jiří Podešva, Ph.D.

Ostrava 2017

VŠB - Technická univerzita Ostrava  
Fakulta strojní  
Katedra aplikované mechaniky

## Zadání bakalářské práce

Student:

**Ondřej Skoupý**

Studijní program:

B2341 Strojírenství

Studijní obor:

3901R003 Aplikovaná mechanika

Téma:

Analytické řešení pružné deformace svorky stabilizátoru  
Analytic Calculation Method for the Elastic Deformation of a Stabilizer  
Clamp

Jazyk vypracování:

čeština

Zásady pro vypracování:

1. Úvod, popis problematiky.
2. Související teorie pružnosti a pevnosti.
3. Analytické řešení.
4. Aplikace na daném předmětu.
5. Analýza výsledků.
6. Závěr

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] Kuba František : Teorie pružnosti a vybrané aplikace. SNTL/Alfa, Praha 1977.
- [2] Hoschl C. : Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL / Alfa, Praha, 1971.
- [3] Kolář V., Němec I., Kanický V. : FEM Principy a praxe metody konečných prvků. Computer Press, 1997.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **doc. Ing. Jiří Podešva, Ph.D.**

Datum zadání: 09.12.2016

Datum odevzdání: 15.05.2017



doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.  
vedoucí katedry



doc. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.  
děkan fakulty

## Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením  
vedoucího bakalářské práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

Dne: 15.května 2017

Ondřej Skoupý

Podpis

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- беру на ве́домі, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že bakalářská práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího bakalářské práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- беру на ве́домі, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledky její obhajoby.

V Ostravě 15. května 2017

Ondřej Skoupý

.....  
podpis

Jméno a příjmení autora:

Ondřej Skoupý

Adresa trvalého pobytu autora:

Kozinova 5446/24, 722 00 Ostrava-Třebovice



## Poděkování

Touto cestou bych rád poděkoval doc. Ing. Jiřímu Podešvovi, Ph.D. za vedení a odborné rady, které byl více než potřeba při řešení této práce, panu Josefu Nedabýlkovi za výrobu podpůrných součástí potřebných při experimentální zkoušce, Ing. Františku Fojtíkovi Ph.D. za pomoc při provádění experimentální zkoušky a panu Ing. Dušanu Kahánkovi z Mubea za zaslání potřebné výkresové dokumentace a vzorků pro experimentální zkoušku.

# Anotace bakalářské práce

SKOUPÝ, O. Analytické řešení pružné deformace svorky stabilizátoru: bakalářská práce.  
VŠB - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra aplikované mechaniky, 2017,  
Vedoucí práce: doc. Ing. Jiří Podešva Ph.D.

Cílem této bakalářské práce je vytvořit analytický výpočet pružné deformace stabilizátorové svorky. Bakalářskou práci můžeme rozdělit na 3 hlavní části, a to: část o zjišťování neznámého modulu pružnosti v tahu, teoretickou část a část analytického výpočtu. Teoretická část je zaměřena na křivé pruty a tlustostěnné nádoby, část analytického výpočtu se poté opírá o poznatky teoretické části a aplikuje je na zadaný problém. Část o zjišťování modulu pružnosti popisuje experimentální zkoušku a následnou aplikaci metody konečných prvků k získání onoho modulu pružnosti. V závěru práce je analytický výpočet číselně aplikován na zadaném problému.

# Anotation of Bachelor Thesis

SKOUPÝ, O. Analytic Calculation Method for the Elastic Deformation of a Stabilizer Clamp: Bachelor Thesis.  
VŠB - Technical University Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Applied Mechanics, 2017,  
Head: doc. Ing. Jiří Podešva Ph.D.

The main goal of this Bachelor Thesis was creating analytic calculation method for the Elastic Deformation of a Stabilizer Clamp. This thesis can be divided into three main parts. Part about finding the unknown Young's modulus, part about theoretical background and part about creating the analytic calculation method. Theoretical part is focused on Thick-wall containers and crooked rods. Part about creating the calculation method depend heavily on theoretical part and applies the knowledge on a real problem. Part about finding Young's modulus describes the experimental test and application of Finite element method in order to obtain the results. Calculation method is then applied with numbers on given problem at the end of this thesis.

# Obsah

Seznam použitých zkratk a symbolů .....	9
1 Úvod.....	12
2 Získání modulu pružnosti v tahu pryže .....	13
2.1. Experimentální zkouška .....	13
2.2. Aplikace FEM .....	18
2.2.1 Úprava geometrie .....	18
2.2.2 Sít'ování a aplikace okrajových podmínek .....	19
2.2.3. Výsledný modul pružnosti v tahu E .....	21
3 Související teorie pružnosti a pevnosti.....	23
3.1. Teorie křivých prutů.....	23
3.1.1. Odvození: .....	24
3.1.2. Odvození normálového napětí .....	26
3.1.3. Kombinované namáhání : .....	28
3.2. Teorie tlustostěnných nádob: .....	29
3.2.1. Stav napjatosti prvku válcové tlustostěnné nádoby.....	30
3.2.2. Základní soustava rovnic pro řešení tlustostěnných válcových nádob.....	31
3.2.3. Rozložení hlavních napětí ve stěně tlustostěnné nádoby .....	33
3.2.4. Změna poloměrů tlustostěnné nádoby.....	35
3.2.5. Víceplášťové tlustostěnné nádoby .....	36
3.2.6. Výpočet přesahu pro získání předpětí u nalisované nádoby .....	37
4 Analytické řešení.....	39
4.1. Zjednodušení na problém tlustostěnných nádob .....	39
4.1.1. Určení předpětí <b>p1</b> .....	40
4.1.2. Určení předpětí <b>p2</b> .....	43
4.2. Zpřesnění za pomoci teorie křivých prutů.....	46
4.2.1. Získání spojitého zatížení.....	46
4.2.2. Ukotvení křivého prutu vazbami.....	47
4.2.3. Sestavení rovnic rovnováhy .....	48
4.2.4. Castiglianova věta .....	50
5 Aplikace analytického řešení na daném problému.....	54
5.1. Aplikace na svorce stabilizátoru OEM1 .....	54
5.1.1. Zjištění rozměrů vstupujících do výpočtu <b>p1</b> a následný výpočet.....	54
5.1.2. Zjištění rozměrů vstupujících do výpočtu <b>p2</b> a následný výpočet.....	55
5.1.3. Přepočet tlaku na spojitě zatížení.....	56
5.1.4. Výpočet silových reakcí a momentu .....	56
5.1.5 Výpočet deformací .....	59

5.2. Výsledky řešení na svorkách OEM2 a OEM3 .....	61
6. Závěr .....	62

## Seznam použitých zkratk a symbolů

Značka	Popis veličiny	Jednotka
<b>V kapitole 3 - Teorie křivých prutů</b>		
$E$	Modul pružnosti v tahu	MPa
$r$	Poloměr křivosti neutrální osy	mm
$h$	Výška profilu	mm
$R$	Poloměr křivosti	mm
$\rho$	Poloměr křivosti libovolného vlákna	mm
$z$	Vzdálenost vlákna od poloměru křivosti neutrální osy	mm
$M$	Silový moment	N.mm
$d\varphi$	Velmi malý úhel $\varphi$	°
$\Delta d\varphi$	Změna úhlu $d\varphi$	°
$\sigma$	Napětí	MPa
$\varepsilon$	Deformace	mm
$l$	Délka libovolného vlákna	mm
$l_0$	Počáteční délka vlákna	mm
$\Delta l$	Poměrné prodloužení vlákna	mm
$dS$	Změna průřezu křivého prutu	mm <sup>2</sup>
$S$	Průřez křivého prutu	mm <sup>2</sup>
$U_y$	Substituce vzorce $S \cdot (R - r)$	-
$M_o$	Ohybový moment	N.m
$W_o$	Modul průřezu v ohybu	m <sup>3</sup>
$T$	Posouvající síla	N
$N$	Normálová síla	N
$\sigma_T$	Tahové napětí	MPa
$dS_o$	Délka elementu oblouku	mm
$dU_1$	Energie napjatosti od momentu $M$	-
$dU_2$	Energie napjatosti od síly $N$	-
$dU_3$	Energie napjatosti od síly $T$	-
$dU_4$	Deformační práce ohybového momentu	-
$\beta$	Součinitel závislý na tvaru průřezu	-
$G$	Modul pružnosti ve smyku	MPa
$dV$	Objem elementu	mm <sup>3</sup>
$\lambda$	Objemová hustota	kg/m <sup>3</sup>
$\lambda_N$	Objemová hustota od síly $N$	kg/m <sup>3</sup>
$\Delta dS_o$	Změna délky elementu	mm

Značka	Popis veličiny	Jednotka
<b>V kapitole 3 - Teorie tlustostěnných nádob</b>		
$\sigma_T$	Obvodové napětí	MPa
$\sigma_a$	Axiální napětí	MPa
$\sigma_r$	Radiální napětí	MPa
$p_{0,1,2..}$	Tlaky působící na nádoby	MPa
$r$	Poloměr nádoby	mm
$dF_t, dF_r, dF_{(r+dr)}$	Vnitřní síly vzniklé vyříznutím elementu nádoby	N
$d\sigma_r$	Změna radiálního napětí	MPa
$dr$	Změna poloměru	mm

$u$	Posuv vlákna ve stěně nádoby	mm
$du$	Změna posuvu	mm
$\varepsilon_r$	Poměrné prodloužení v radiálním směru	-
$\varepsilon_T$	Poměrné prodloužení v obvodovém směru	-
$\mu$	Poissonova konstanta	-
$\Delta r$	Změna poloměru	mm
$\Delta r_2^I$	Změna poloměru I. nádoby	mm
$\Delta r_2^{II}$	Změna poloměru II. nádoby	mm
$\bar{C}_1^I$	První integrační konstanta I. nádoby	-
$\bar{C}_2^I$	Druhá integrační konstanta I. nádoby	-
$\bar{C}_1^{II}$	První integrační konstanta II. nádoby	-
$\bar{C}_2^{II}$	Druhá integrační konstanta II. nádoby	-
$E_I$	Modul pružnosti v tahu první nádoby	MPa
$E_{II}$	Modul pružnosti v tahu druhé nádoby	MPa
$r_{1,2,3}$	Poloměry nádob	mm

Značka	Popis veličiny	Jednotka
<b>Kapitola 4 - Analytické řešení - Tlustostěnné nádoby</b>		
$E_1$	Modul pružnosti v tahu stabilizátoru	MPa
$E_2$	Modul pružnosti v tahu pryžové objímky	MPa
$E_3$	Modul pružnosti v tahu kovové svorky stabilizátoru	MPa
$\mu_1$	Poissonova konstanta – Stabilizátor	-
$\mu_2$	Poissonova konstanta – Pryžová objímka	-
$\mu_3$	Poissonova konstanta – Kovová svorka	-
$p_1$	Předpětí na spojení stabilizátor/pryžová objímka	MPa
$p_2$	Předpětí na spojení pryžová objímka/kovová svorka	MPa
$r_0$	Vnitřní poloměr stabilizátoru	mm
$r_1^I$	Vnější poloměr stabilizátoru	mm
$r_1^{II}$	Vnitřní poloměr pryžové objímky	mm
$r_2$	Vnější poloměr pryžové objímky	mm
$\Delta r_1^I$	Deformace vnějšího poloměru stabilizátoru	mm
$\Delta r_1^{II}$	Deformace vnitřního poloměru pryžové objímky	mm
$p_0$	Vnitřní tlak	MPa
$p_3$	Vnější tlak	MPa
$C_{1,2}$	Integrační konstanty	-
$\Delta r_{1,2}$	Přesahy	mm
$\bar{r}_2^{II}$	Zvětšený poloměr pryžové objímky	mm
$\Delta \bar{r}_2^{II}$	Deformace zvětšeného poloměru pryžové objímky	mm
$\bar{r}_2$	Původní vnější poloměr pryžové objímky	mm
$\Delta r_2^{III}$	Deformace vnitřního poloměru kovové svorky	mm
$r_{1,2}$	Poloměry myšlené víceplášťové nádoby	mm

Značka	Popis veličiny	Jednotka
<b>Kapitola 4 – Analytické řešení - křivé pruty + Kapitola 5. – Aplikace řešení</b>		
$p$	Tlak	MPa
$F$	Síla	N
$S$	Průřez/plocha	mm <sup>2</sup>
$q$	Spojité zatížení	N/mm
$l_k$	Délka křivky, na kterou působí spojité zatížení	mm
$M$	Silový moment (od symetrie)	N.m
$R_{Ax}$	Silová reakce v ukotvení A v ose x	N
$R_{Bx}$	Silová reakce v ukotvení B v ose x	N
$R_{By}$	Silová reakce v ukotvení B v ose y	N
$l$	Délka rovného úseku křivého prutu	mm
$R$	Poloměr křivosti	mm
$Q_1$	Síla od spojitého zatížení na rovném úseku	N
$Q_2$	Síla od spojitého zatížení na křivém úseku	N
$Q_{2x}, Q_{2y}$	Rozložení síly $Q_2$ dle os x a y	N
$l_2$	Délka oblouku	mm
$R_x$	Velikost poloměru přenesená do osy x	mm
$R_y$	Velikost poloměru přenesená do osy y	mm
$\alpha$	Úhel	°
$\varphi$	Úhel řezu	°
$\varphi_M$	Natočení od silového momentu M	°
$Q$	Síla od spojitého zatížení v řezu	N
$l_r$	Délka oblouku do řezu	mm
$x$	Interval vzdálenosti ve které vedeme řez	mm
$M_\varphi$	Momentová rovnice řezu na křivé části	-
$M_x$	Momentová rovnice řezu na rovné části	-
$J$	Moment setrvačnosti průřezu	mm <sup>4</sup>
$E$	Modul pružnosti v tahu svorky	MPa
$w$	Průhyb (deformace)	mm

# 1 Úvod

V důsledku různorodosti silničního povrchu, jenž klade vysoké nároky na podvozek, bylo nutné, zajistit stabilitu vozidla takovým způsobem, aby jízda v něm byla pro pasažéry příjemná. Stabilizátor je zařízení, které slouží právě k tomuto účelu, a to tím, že redukuje naklonění vozidla při průjezdu zatáčkou. Je to velice důležitý bezpečnostní prvek, jelikož při průjezdu zatáčkou ve vyšší rychlosti se snižuje přilnavost kol na vnitřní straně zatáčky. Důsledkem je pokles schopnosti přenášet boční síly a vynášení vozidla ze zatáčky. Jejich úkolem společně s odpružením je udržovat přilnavost všech kol na vozovce.



Obrázek č. 1 – Umístění stabilizátoru na podvozku []

Stabilizátor ve své podstatě je pouze patřičně tvarovaná pružná tyč či trubka spojující obě strany odpružení na vozidle. Standardní stabilizátor je ve tvaru písmene „U“ a nazýváme jej zkrutný. Jeho konce jsou s náboji kol (jedné nápravy) propojeny tak, aby mohly přenášet výchylky kol. Kroucením stabilizátoru je vyvozována síla, která zvyšuje přilnavost kola.

K upevnění stabilizátoru k nápravě či karoserii slouží kovopryžové pouzdro či jinak řečeno svorka stabilizátoru, která dovolí případný pohyb vzniklý ohýbáním stabilizátoru.

Při montáži stabilizátoru do kovopryžového pouzdra-svorky je nutné nalisováním upevnit pryžovou objímku na stabilizátor. Určitá síla je aplikována na pryžovou objímku, která se vlivem rozdílu rozměrů určitým způsobem deformuje a tedy mění svůj původní tvar. Tento celek je následně vsazen do kovových svorek, kde díky již předešlé změně tvaru a tedy rozměrů, dochází rovněž k určité deformaci.

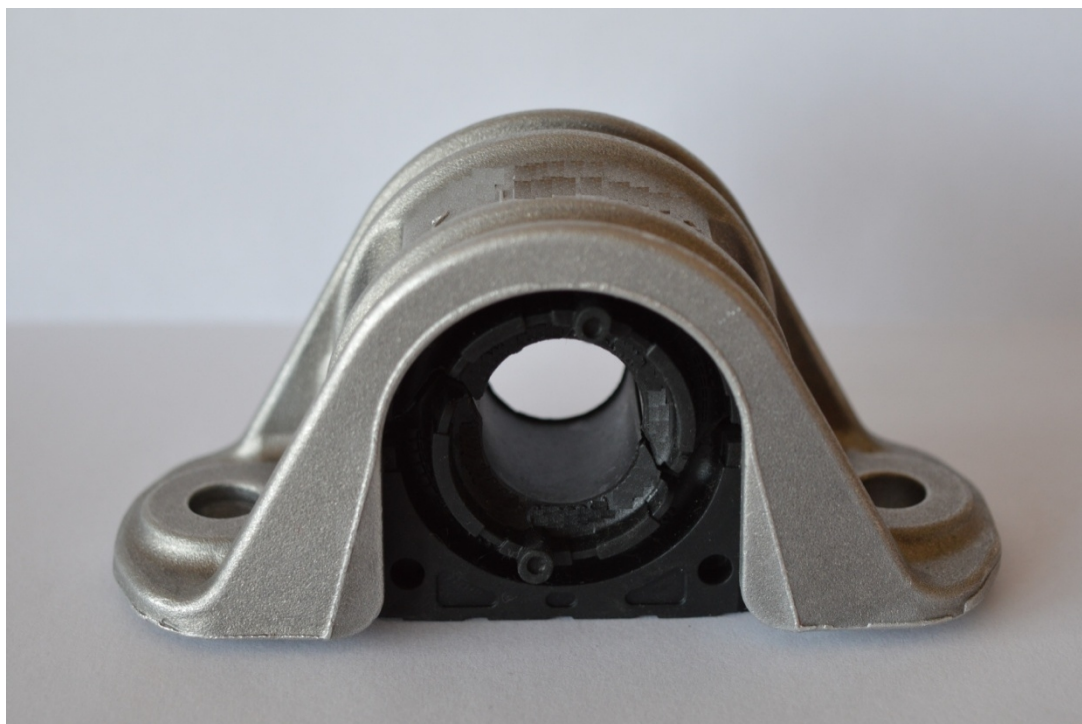


## 2 Získání modulu pružnosti v tahu pryže

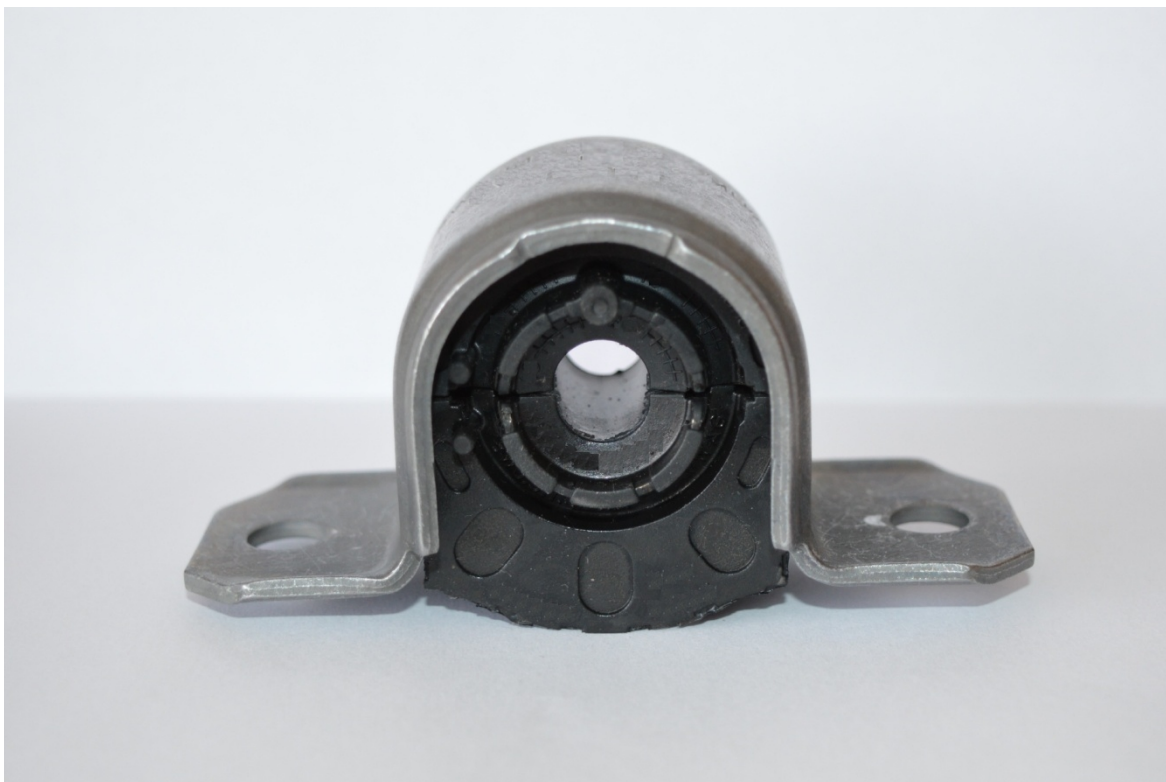
Cílem této bakalářské práce, je získat analytický výpočet pružné deformace svorky stabilizátoru po tom, co se do ní nalisuje pryžová objímka se stabilizátorem. Abychom však byli schopní prokontrolovat správnost získaného analytického výpočtu, musíme znát všechny materiálové vlastnosti součástí, které jsou v kovopryžovém pouzdře stabilizátoru. Samotný stabilizátor a kovovou svorku budeme brát jako součásti z normalizovaných materiálů, a tedy jejich moduly v pružnosti v tahu a Poissonovy konstany budou známe, ale u pryžové objímky tomu tak není, protože se jedná o kovové jádro, které je silně pogumováno. Následkem toho musíme provést experimentální zkoušku, abychom získali chybějící modul pružnosti v tahu. Hodnoty získané zkouškou následně porovnáme s hodnotami získanými z řešení za pomoci metody konečných prvků.

### 2.1. Experimentální zkouška

Firmou Mubea, byly zadány k řešení tři typy kovopryžových pouzder stabilizátorů. Pro naše potřeby jsme je označili OEM1, OEM2 a OEM3. Tato pouzdra jsou vyobrazena na následujících obrázcích č. 2, 3, a 4.



Obrázek č. 2 – Kovopryžové pouzdro stabilizátoru OEM1



Obrázek č. 3 – Kovopryžové pouzdro stabilizátoru OEM2



Obrázek č. 4 – Kovopryžové pouzdro stabilizátoru značky OEM3

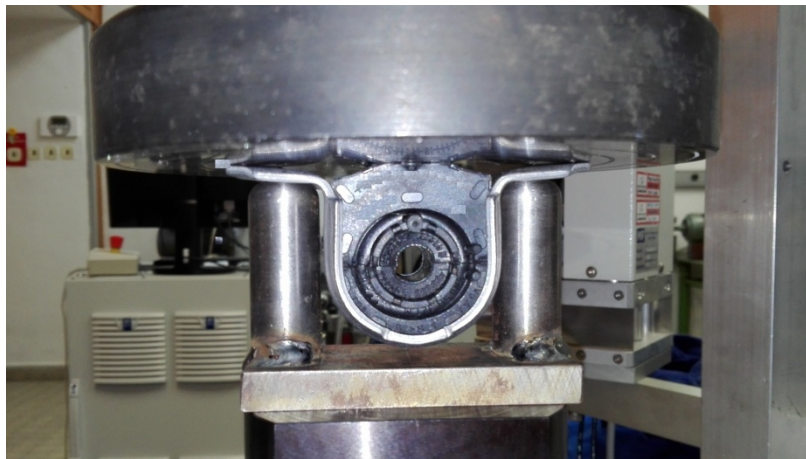
Zkouška probíhala na katedře aplikované mechaniky Vysoké školy Báňské–Technické univerzity v Ostravě. Pro získání modulu pružnosti jsme se rozhodli využít kovové svorky k zamezení větších deformací v jiných směrech, než je ten, ve kterém působí síla, kterou jsme pryžové objímky zatěžovali, a který je stěžejní pro získání závislosti deformace na síle. Pro tuto zkoušku jsme proto museli nechat vyrobit speciální podpůrné součásti (viz obrázek č. 6 a č.8), které podepírali kovovou svorku pouze na plochých kotvících „packách“ zatímco byla pryž seshora zatěžována silou v zařízení Testometric M500-50CT.



Obrázek č. 5 – Testovací zařízení využití při materiálové zkoušce Testometric M500-50CT

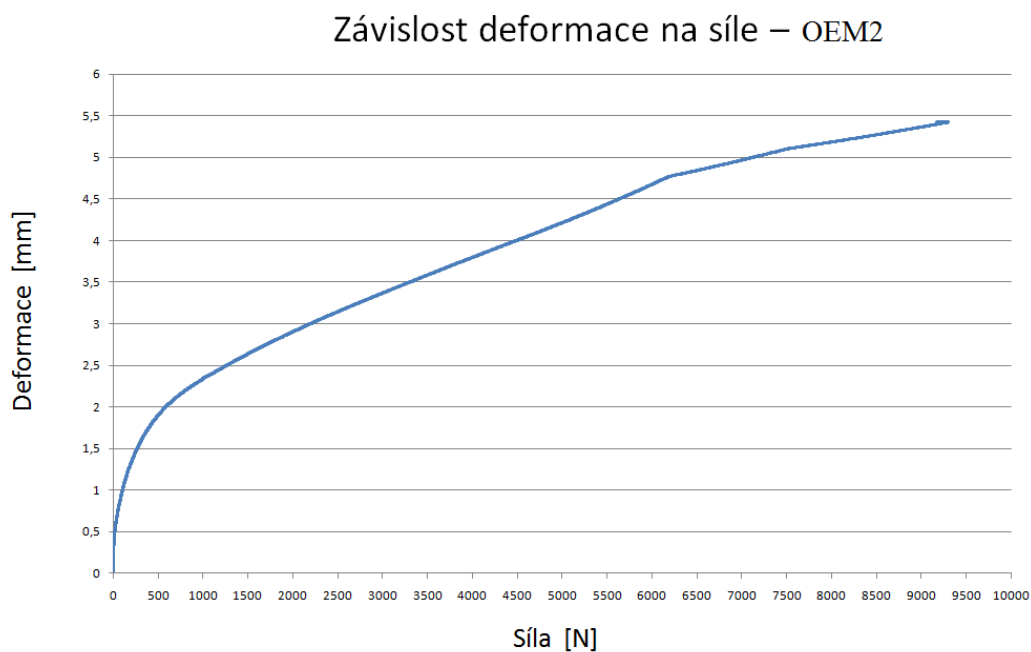
Bohužel jsme byli schopni zrealizovat pouze testy pro pryže od typů svorek OEM1 a OEM2, jenž jsou zobrazeny na následujících obrázcích. Protože kovová svorka typu OEM3 má příliš složitý tvar pro provedení zkoušky. A v rámci této práce by bylo příliš složité nechat vyrobit správnou podpůrnou součást pro tento typ svorky.

V zařízení Testometric jsme nechali působit sílu, tak, aby docházelo k deformaci rychlostí 1 mm/min a zaznamenávali jsme závislost síly a deformace až do chvíle, než se obě kotvící „packy“ dotýkaly zatěžovacího disku.



Obrázek č. 6 – Zatížené kovopryžové pouzdro OEM2

Z obrázku č. 6 je zřejmé, že ve chvíli, když se jedna či obě kotvící „packy“ dotkly zatěžovacího disku, došlo ke změně hledané tuhosti, protože přístroj začal tlačit na podporu. Tyto skutečnosti jsou velmi patrné v grafu závislosti deformace na síle, kdy ve chvíli doteku dojde ke vcelku prudké změně grafu viz. obrázek č. 7, kde je tato změna patrná při síle přibližně 6000 N a 7500 N.

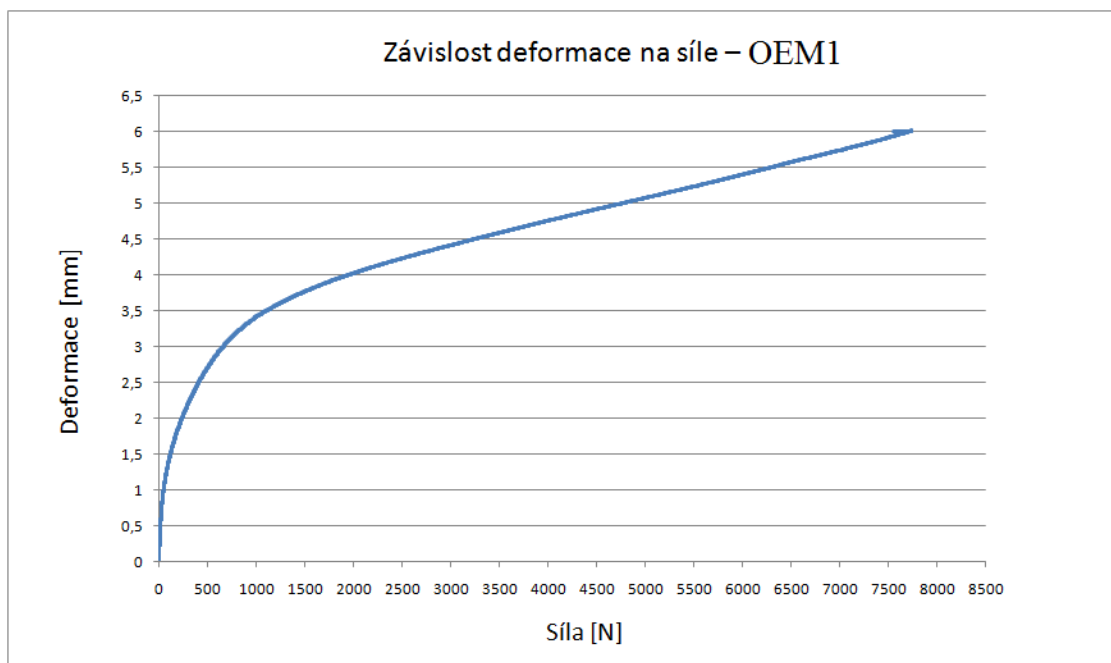


Obrázek č. 7 – Závislost deformace na síle u pryžové objímky OEM2

Ke stejnému zjištění jsme došli i při zatěžování pryže značky OEM1. Jehož postup a graf závislosti deformace na síle jsou na následujících obrázcích. Při zatěžování pryže OEM1 jsme zatěžovali při prvním měření pryž přímo zatěžovacím diskem, což se však ukázalo jako neefektivní, protože se kotvící „packy“ velmi rychle dotkly zatěžovacího disku a ovlivnily tak měření. Při druhém měření jsme mezi disk a pryž vložili kovovou destičku, která zatěžovala pouze pryž a dosáhli jsme tak mnohem lepších výsledků.



Obrázek č. 8 – Zatěžování pryže značky OEM1 s vloženou destičkou



Obrázek č. 9 – Graf závislosti deformace na síle u pryžové objímky OEM1



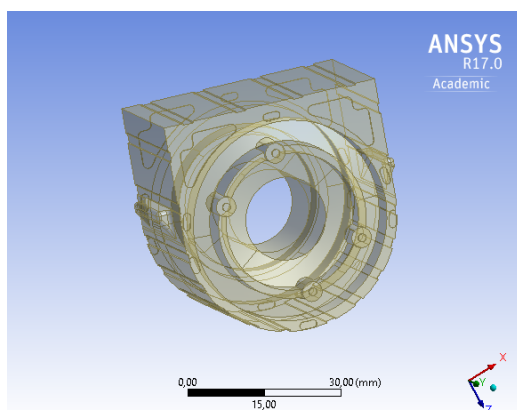
## 2.2. Aplikace FEM

Tlakovou zkouškou jsme získali závislost deformace na síle pro pryžové objímky od značek OEM1 a OEM2. Protože však vzorky, které jsme měřili, nebyly normalizované, nemůžeme využít postup zjištění modulu pružnosti v tahu  $E$  jako u tahové/tlakové zkoušky. Rozhodli jsme se proto využít metodu konečných prvků (FEM/MKP) konkrétně softwarový řešič ANSYS ke zjištění hledaného modulu pružnosti. Do programu ANSYS jsme tedy importovali geometrii kovové svorky a pryžové objímky stabilizátoru, a snažili se v programu nasimulovat podobné podmínky, kterými bylo kovopryžové pouzdro vystaveno při experimentální zkoušce. Zatížili jsme tedy ve výpočtu pryžovou objímku silou a úpravou modulu pružnosti zadaného v programu jsme se snažili získat deformaci takovou, aby byla pokud možno stejná, nebo dostatečně podobná té, kterou jsme získali z experimentální zkoušky.

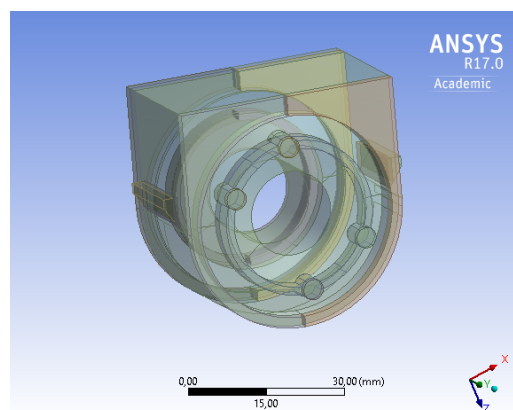
### 2.2.1 Úprava geometrie

Před spuštěním samotného výpočtu, či vůbec zavedením okrajových podmínek, jsme museli importovanou geometrii zjednodušit tak, aby ji byl program ANSYS schopen vysítovat za využití hexahedronové sítě (metoda Hex dominant), protože řešení za pomoci tohoto typu síťování je většinou upřednostňováno. Důležité je také podotknout, že vzhledem k tomu, že cílem řešení bylo získat pouze modul pružnosti pryžové objímky, rozhodli jsme se takto upravovat pouze pryžovou objímku, protože u ní jsme potřebovali přesnější výsledky. Kovová svorka byla vysítována tetrahedrony.

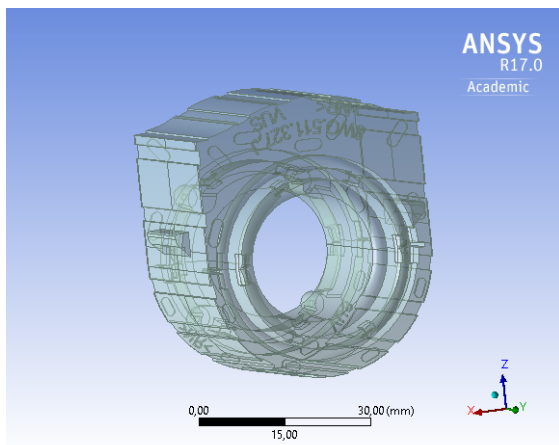
Na pryžové objímce se nacházelo velké množství malých ploch (jednalo se zejména o malá zaoblení, plochy vzniklé při výrobě či značení kusu), které mohly být odstraněny bez obavy o velkou chybu ve výpočtu a o nařezání celku na více částí, které byly snáze síťovatelné. U kovopryžového pouzdra OEM2 byla navíc přidána geometrie zatěžovacího disku, pro pozdější aplikování kontaktu.



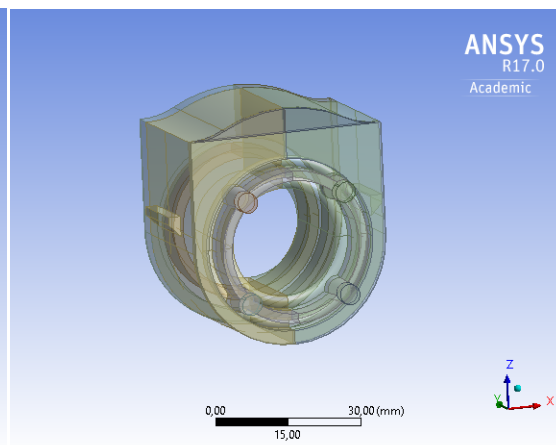
Obrázek č. 10 – Neupravená geometrie OEM1



Obrázek č. 11 – Upravená geometrie OEM2



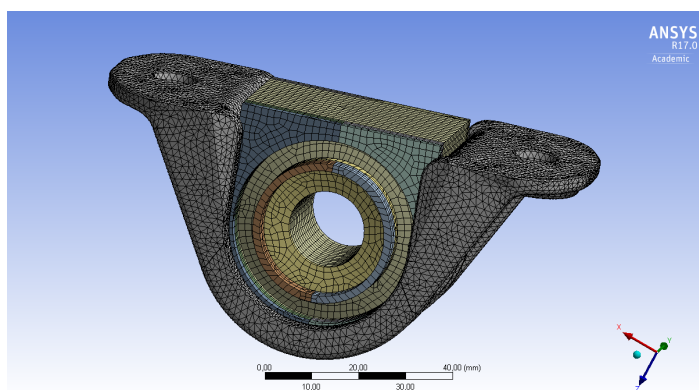
Obrázek č. 12 – Neupravená geometrie OEM2



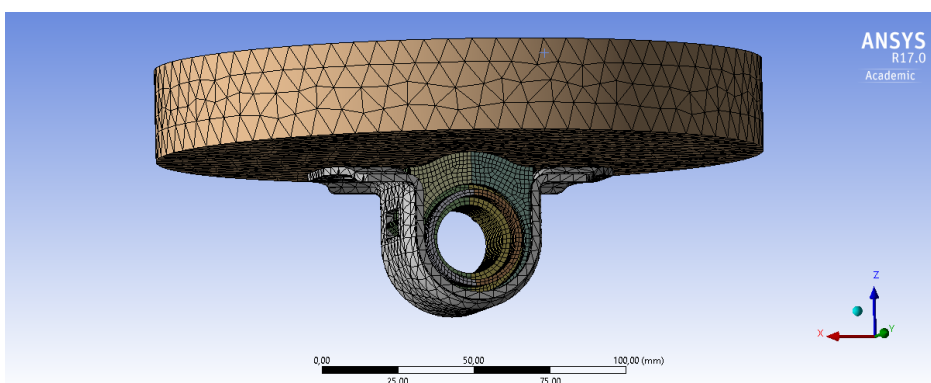
Obrázek č. 13 – Upravená geometrie OEM3

### 2.2.2 Síťování a aplikace okrajových podmínek

Jak již bylo zmíněno výše, pryžová objímka byla síťována metodou Hex dominant pro větší přesnost. Velikost elementů byla nastavena na 2mm u OEM1 a 1,5 mm u OEM2 a vysíťování je ukázáno na obrázku č. 14 a 15.

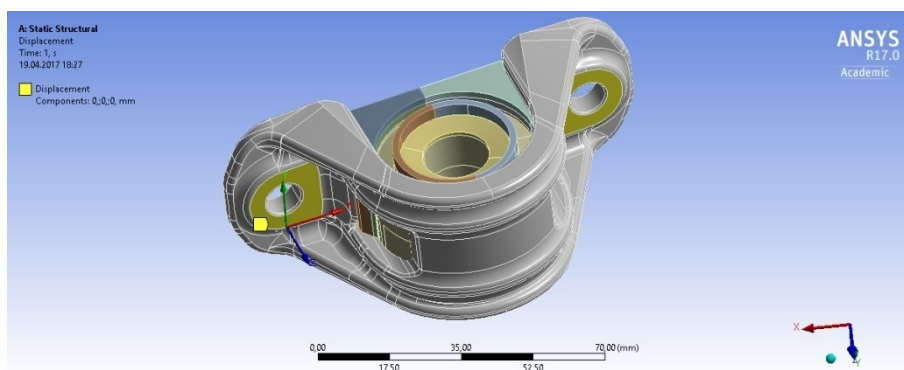


Obrázek č. 14 – Vysíťované kovopryžové pouzdro OEM1



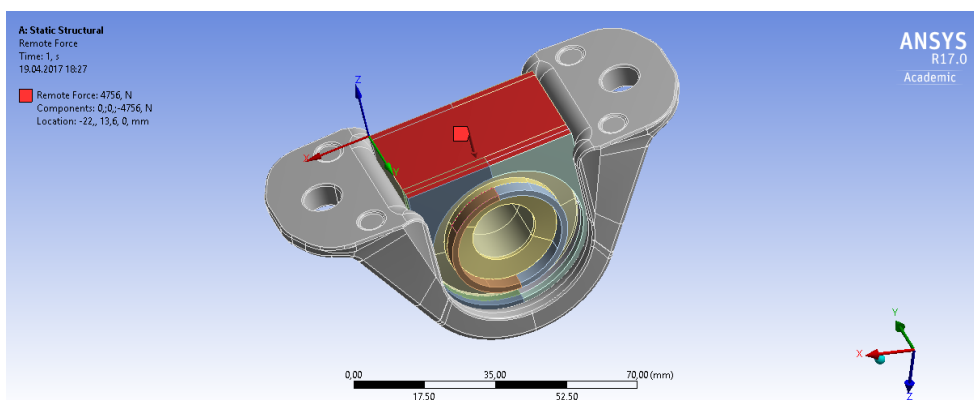
Obrázek č. 15 – Vysíťované kovopryžové pouzdro OEM2

Při aplikaci okrajových podmínek jsme se snažili co nejvíce napodobit podmínky experimentální zkoušky. V případě u pryžové objímky a kovové svorky stabilizátoru OEM1 jsme tedy aplikovali vazbu, která odebírala 3 stupně volnosti (v ose x,y,z) na plochy, kde se opírala kovová svorka při experimentální zkoušce.



Obrázek č. 16 – Aplikování vazby (Displacement)

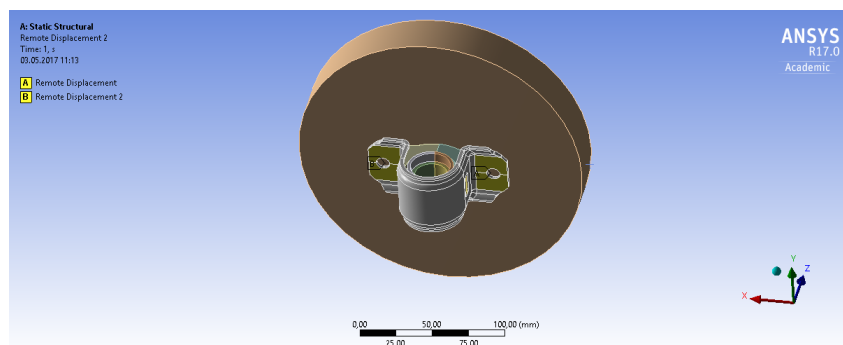
Dále jsme nechali působit sílu (remote force, typ síly rigid) na celou spodní plochu pryžové objímky tak, aby se celá tato plocha stlačovala rovnoměrně jak je znázorněno na obrázku č. 17.



Obrázek č. 17 – Aplikování síly (Remote force-Rigid)

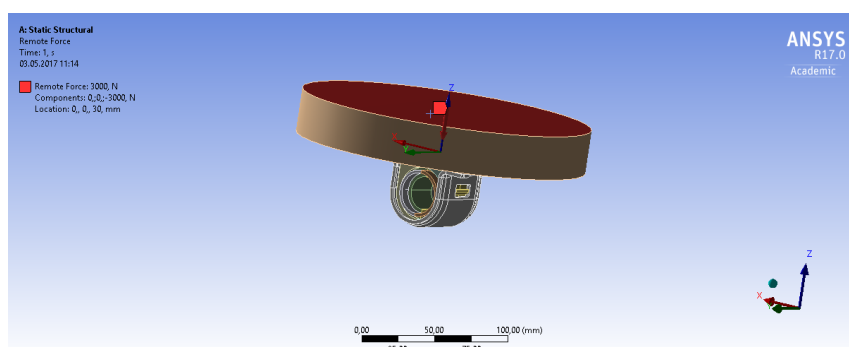
V případě pryžové objímky a kovové svorky stabilizátoru OEM2 jsme pak aplikovali vazbu, která odebírala 3 stupně volnosti, avšak v tomto případě se jednalo o odebrání možnosti pohybu ve směru osy z a zakázání rotací kolem os x a z (Remote displacement). Tímto jsme povolili natočení kotvících „pacek," tak jak tomu bylo při experimentální zkoušce.





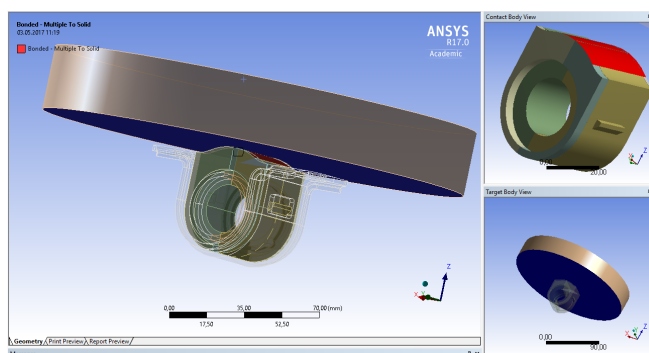
Obrázek č. 18 – Aplikování vazeb (Remote displacement)

Dále jsme nechali působit sílu (remote force, typ síly rigid) na zmíněný zatěžovací disk, tak aby nedocházelo k jeho deformování a zatěžoval tak pryžovou objímku OEM2 rovnoměrně.



Obrázek č. 19 – Aplikování síly (Remote force – Rigid)

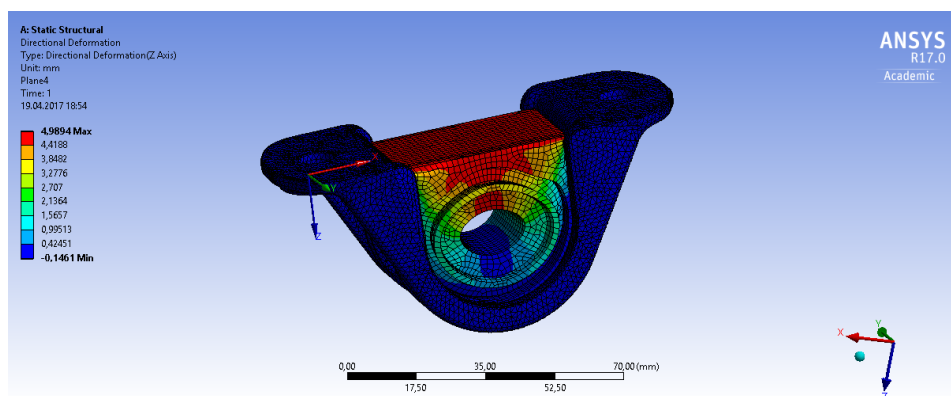
Pro správnost výpočtu však musel být nastaven kontakt mezi diskem a pryžovou objímkou. Ten jsme zvolili jako pevný (Bonded), protože během experimentu nedocházelo k oddělení těchto dvou součástí.



Obrázek č. 20 – Kontakt mezi pryžovou objímkou a diskem

### 2.2.3. Výsledný modul pružnosti v tahu E

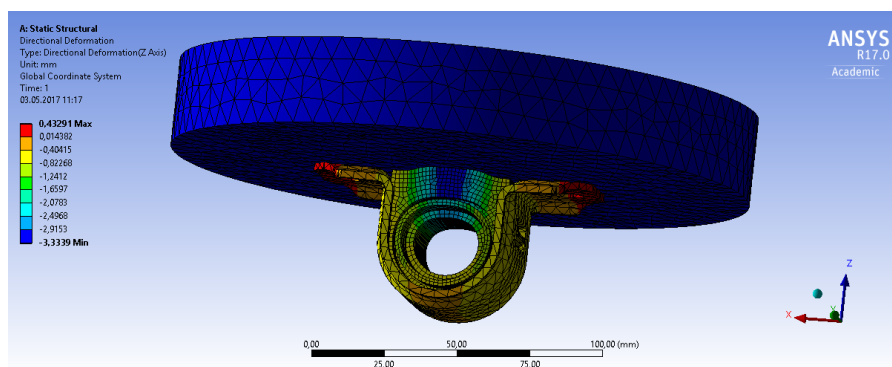
Protože pryžové objímky jak OEM1, tak OEM2 nejsou vyrobené pouze z pryže, ale jedná se o opryžovaný kov (předpokládáme tenký plech). Budeme tedy vycházet z části grafu závislosti deformace na síle, kde je křivka grafu již lineární (jak u OEM2, tak u OEM1 začíná být křivka grafu lineární přibližně na hodnotách 2000 N). Při zatížení silou 4756 N by na pryžové objímce OEM1 měla nastat deformace o velikosti 5 mm.



Obrázek č. 21 – Deformace pryžové objímky OEM1  
(maximální deformace vyobrazena červenou barvou)

Při nastavení modulu pružnosti pryže ve výpočtu na hodnotu 13,6 MPa je vypočtená hodnota deformace 4,9896 mm. Můžeme tedy říci, že modul pružnosti v tahu pryžové objímky OEM1 je tedy přibližně  $E=13,6$  MPa.

Zatížení o velikosti 3000N by na pryžové objímce OEM2 mělo vyvodit deformaci o velikosti 3,37 mm. Po provedení výpočtu v programu ANSYS jsme vypočetli, že při nastavení modulu pružnosti pryžové objímky na hodnotu  $E= 60$  MPa bude deformace rovna 3,34 mm.



Obrázek č. 22 – Deformace pryžové objímky OEM2  
(maximální deformace vyobrazena modrou barvou)

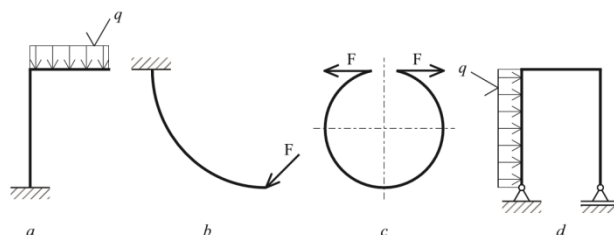
U experimentální zkoušky pryžové objímky OEM2 došlo k lehké deformaci kovové svorky, a proto víme, že byla zkouška zatížena určitou chybou. Tato chyba se nám projevila také u výpočtu za pomoci FEM/MKP. A výsledný modul pružnosti v tahu tedy není úplně přesný. Pro využití v této práci však tato hodnota postačí.

### 3 Související teorie pružnosti a pevnosti

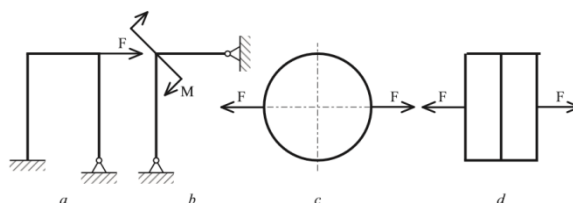
Při řešení této práce, budou využity dvě různé výpočetní teorie, teorie křivých prutů a teorie tlustostěnných nádob. V rámci umožnění aplikování těchto teorií bude reálný problém zjednodušen do obecnějšího tvaru.

#### 3.1. Teorie křivých prutů

Křivými pruty nazýváme zakřivené prvky konstrukcí, u kterých stejně jako je tomu u přímých prutů, převládá jeden rozměr a to převážně délkový. A pokud dojde vlivem působení síly, či jiného typu zatížení ke změně délky, můžeme říci, že se prut deformuje a tudíž v něm vzniká napětí. Křivé pruty mohou být staticky určité (obrázek č. 23) a staticky neurčité (obrázek č. 24). Staticky neurčité mohou být pruty vlivem uložení konců, mohou však být neurčité i vnitřně. Pruty a), b) vyobrazené na obrázku č. 23 jsou staticky neurčité vlivem uložení a prut c) a d) na témže obrázku vnitřně. [3]



Obrázek č. 23 – Staticky určité křivé pruty [3]

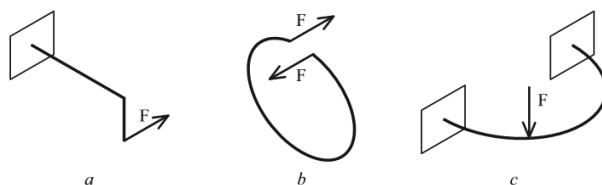


Obrázek č. 24 – Staticky neurčité křivé pruty [3]

Dále je dělíme dle způsobu zatížení a zakřivení, a to na prostorové (obrázek č. 25) či rovinné (obrázky č. 23 a 24). U rovinných křivých prutů leží střednice (křivka udávající část kruhového oblouku), jak už napovídá název, ve stejné rovině jako působící síly. U prostorových tomu tak není. Jednou z nejvýznamnějších charakteristik křivých prutů je pak zakřivení, které je definováno touto podmínkou:

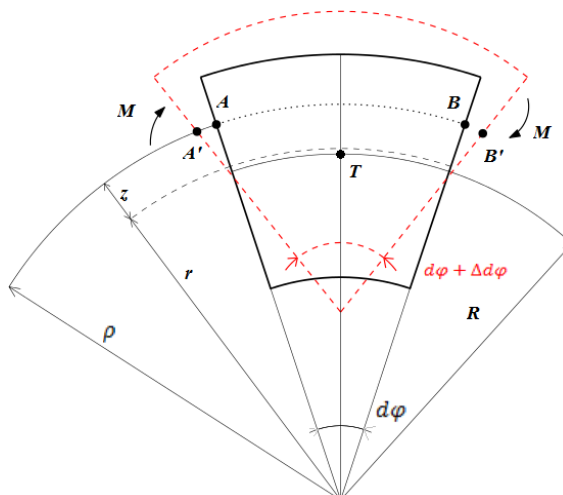
$$\frac{r}{h} \geq 5,$$

a kde  $r$  je poloměr křivosti neutrální osy a  $h$  je výška profilu, jak je znázorněno na obrázku č. 26. Některé literatury mohou uvádět poměr až  $\frac{r}{h} \geq 10$ . Je-li tento poměr splněn, lze předpokládat že normálová napětí vyvolaná ohybem jsou v příčném průřezu rozdělena lineárně. Tedy stejně jako je tomu u tenkých přímých prutů. Ovšem pokud tato podmínka není splněna a je tedy daný poměr menší než 5, nejedná se již o tenké křivé pruty, nýbrž o pruty silně zakřivené (tlusté křivé pruty), a u těchto prutů je průběh normálových napětí od ohybu nelineární. [3]



Obrázek č. 25 – Prostorové křivé pruty

### 3.1.1. Odvození:



Obrázek č. 26 – Element křivého prutu

Pro důkazové odvození vztahů pro tenké případně tlusté křivé pruty, budeme uvažovat velmi malý element křivého prutu o poloměru křivosti  $R$  a poloměru křivosti neutrální osy  $r$ . Na který působí ohybový moment  $M$ . Z nákresu je zřejmé, že vlákna nacházející se na vnější straně budou ohybem zkracována a vlákna na vnitřní straně ohybem prodlužována. Přibližně uprostřed se budou nacházet vlákna, která se nebudou ani zkracovat, ani prodlužovat. Tato vlákna tvoří (vyplňují) takzvanou neutrální plochu, jejíž průsečnice s průřezem tvoří neutrální osu, která je na obrázku č. 26 vyobrazena čárkovaně. Pokud bychom tedy zjišťovali deformaci (prodloužení) vláken na neutrální ose, zjistíme, že se vzdálenost bodů  $C$  a  $D$  nezmění. Pokud však vyjdeme z Bernoulliovy představy, že rovinné průřezy zůstávají i po zdeformování rovinné a kolmé na střednici, pak jsme schopni určit prodloužení libovolného vlákna. Nejprve však musíme stanovit poloměr křivosti pro tato libovolná vlákna.[1]

$$\rho = r + z \quad (3.1)$$

Dále můžeme říci, že vzdálenost bodu A od bodu B je dána křivkou o délce  $s$  a tato délka se se změnou velikosti úhlu také změní. Z čehož jsme schopni odvodit vztah pro prodloužení křivky (viz. obrázek č. 26):

$$\widehat{AB} = ds = \rho \cdot d\varphi = (z + r) \cdot d\varphi \quad (3.2)$$

Po změně  $d\varphi$  dochází k tomu, že umístění bodu A se změní a přesune se do bodu A'. Ten stejný princip platí pro bod B→B'. Vzdálenosti mezi původními body a body po změně  $d\varphi$  jsou rovné.

$$\widehat{AA'} = \widehat{BB'} \quad (3.3)$$

Abychom mohli pohodlně pokračovat v odvozování, je nutné vědět, že pro malé úhly, přibližně do  $5^\circ$ , se jejich funkční hodnoty rovnají dosazeným hodnotám, čehož využijeme dále v odvozování. Pokud se nyní zaměříme na kótu  $z$  na obrázku č. 26, zjistíme, že úsečka kterou označuje svírá určitý malý úhel  $d\varphi$  s hranou původního elementu.

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta d\varphi}{2} = \frac{\Delta d\varphi}{2} \quad (3.4)$$

Stejný úhel můžeme také získat z poměrů stran  $\frac{\widehat{AA'}}{z}$ . Z čehož jsme poté schopni usoudit, že:

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta d\varphi}{2} = \frac{\Delta d\varphi}{2} = \frac{\widehat{AA'}}{z}, \quad (3.5)$$

a následně vyjádřit vzdálenost bodů A-A' případně B-B' jelikož tyto vzdálenosti jsou stejné.

$$\widehat{AA'} = \frac{z \cdot \Delta d\varphi}{2} \quad (3.6)$$

Pokud budeme předpokládat, že se jedná o jednoosou napjatost, tak z Hookeova zákona lze vyjádřit poměrnou deformaci  $\varepsilon$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

kde  $E$  je Youngův modul pružnosti v tahu, a  $\sigma$  je napětí v tahu. Zaměříme-li se více na poměrnou deformaci nebo také v našem případě na poměrné prodloužení, získáme tento vztah:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{2 \cdot AA'}{AB} = \frac{z \cdot \Delta d\varphi}{(z + r) \cdot d\varphi}. \quad (3.7)$$

Kde  $z \cdot \Delta d\varphi$  označuje prodloužení vlákna, které je od neutrální plochy vzdálené o  $z$ . Naproti tomu  $(z + r) \cdot d\varphi$  udává jeho původní délku. A jelikož je zřejmé, že napětí v prutu má hyperbolický průběh, pak elementární síly působící v průřezu nesmějí dávat žádnou výslednici tedy

$$\int_{(S)} \sigma \cdot dS = 0 \quad (3.8.1)$$

Dosazením do tohoto vzorce a jeho následnou úpravou získáváme tento tvar:

$$\int_{(S)} \sigma \cdot dS = \int_{(S)} E \cdot \varepsilon dS = E \cdot \int_{(S)} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{z}{r+z} \cdot dS = 0 \quad (3.8.2)$$

$$E \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \int_{(S)} \frac{z}{r+z} dS = 0 \quad (3.8.3)$$

Modul pružnosti a poměrné prodloužení mohou předepsat před samotný integrál, jelikož nezávisí na ploše. Pokud se nyní zaměříme na rovnici (3.8.3), musí být jasné, že aby byla zachována rovnost, musí být integrál roven 0, protože jak modul pružnosti, tak poměrné prodloužení nulové nejsou. Další úpravou tohoto integrálu pak získáme poloměr křivosti neutrální osy a to za pomoci substituce  $r + z = \rho$ . [1]

$$\int_{(S)} \frac{z}{r+z} ds = 0 \quad (3.9.1)$$

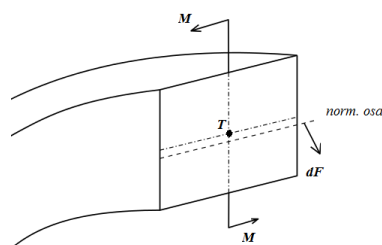
$$\int_{(S)} \frac{z}{\rho} ds = 0 \rightarrow \int_{(S)} \frac{z+r-r}{\rho} ds = 0 \quad (3.9.2)$$

$$\int_{(S)} \left( \frac{z+r}{\rho} - \frac{r}{\rho} \right) ds = 0 \rightarrow \int_{(S)} \left( 1 - \frac{r}{\rho} \right) ds = 0 \quad (3.9.3)$$

$$S - \int_{(S)} \frac{r}{\rho} ds = 0 \quad (3.9.4)$$

$$r = \frac{S}{\int_{(S)} \frac{ds}{\rho}} \quad (3.9.5)$$

### 3.1.2. Odvození normálového napětí



Obrázek č. 27 – Znázornění zatížení pro odvození normálového napětí

Vezmeme-li v potaz fakt, že elementární síly  $\sigma dS$  jsou ekvivalentní silové dvojici, jejíž moment je roven ohybovému momentu, pak musí platit tento vztah:

$$M - E \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \int_{(s)} \frac{z}{(z+r)} \cdot z dS = 0 \quad (3.10)$$

Pokud se zaměříme pouze na integrál v daném vzorci, který charakterizuje průřez prutu, a upravíme jej takto:

$$\int_{(s)} \frac{z}{\rho} \cdot z dS = \int_{(s)} \left( \frac{z+r-r}{\rho} \right) \cdot z dS \quad (3.11)$$

$$\int_{(s)} \left( \frac{\rho}{\rho} \cdot z - \frac{r}{\rho} \cdot z \right) dS = \int_{(s)} z dS - r \cdot \int_{(s)} \frac{z}{\rho} dS = Uy \quad (3.11.1)$$

Můžeme původní rovnici přepsat, ale musí se však jednat o prut, který je relativně tenký a hodnota  $z$  je o hodně menší než hodnota  $\rho$  pak se integrál rovná 0, neutrální osa prochází těžištěm a jsme schopni vzorec takto upravit:

$$M - E \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot Uy = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{E \cdot Uy} \quad (3.12)$$

Nyní, pokud trochu upravíme poměrné prodloužení, získáme vztah pro výpočet normálového napětí od ohybového momentu.

$$\varepsilon = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{z}{r+z} = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{z}{\rho} \quad (3.13.1)$$

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{\varepsilon \cdot \rho}{z} = \frac{\sigma \cdot \rho}{E \cdot z} \quad (3.13.2)$$

$$\frac{M}{E \cdot Uy} = \frac{\sigma \cdot \rho}{E \cdot z} \quad (3.13.3)$$

$$\sigma = \frac{M \cdot z}{Uy \cdot \rho} \quad (3.13.4)$$

Kde  $M$  je ohybový moment,  $z$  je vzdálenost libovolného vlákna od neutrální osy,  $\rho$  je poloměr křivosti pro libovolné vlákno, a  $Uy = S \cdot (R - r)$ , kde  $S$  je plocha průřezu prutu,  $R$  je poloměr střednice a  $r$  je poloměr neutrální osy. V případě tenkých křivých prutů se však dá hyperbolický průběh napětí od ohybu nahradit přímkou a pro jeho výpočet lze použít stejného vzorce, jako pro přímé nosníky a to:

$$\sigma = \frac{Mo}{Wo}$$

kde  $Mo$  je ohybový moment a  $Wo$  modul průřezu pro ohyb.[1]

### 3.1.3. Kombinované namáhání :

Při běžném namáhání se v průřezu zpravidla nepřenáší pouze ohybový moment, ale také posouvající síla  $T$  a normálová síla  $N$  (viz obrázek č. 28). Síla  $N$ , jenž prochází těžištěm průřezu, a způsobuje v něm rovnoměrné tahové napětí  $\sigma_T = N/S$ . Naopak síle  $T$  přísluší tečná napětí, která jsou rozdělena podobně, jako u přímých nosníků. Pokud se jedná o tenké křivé pruty, lze tečná napětí zanedbat. Ohybový moment  $M$ , který jak jsme si již výše určili, způsobuje ohybová napětí. Pokud chceme určit napětí, je důležité se zamyslet nad tím, pro jaký bod toto napětí počítáme a jsou-li vlákna v daném bodě tažena/tlačena, smýkána či ohýbána.[1]

Chceme-li určit deformace, tak nejjednodušším způsobem jsou Castiglianovy věty. Pokud na křivém prutu dochází pouze k ohybu (tzv. čistý ohyb), vznikne v elementu o délce  $ds_0 = R d\varphi$  energie napjatosti:

$$dU_1 = \frac{1}{2} M \Delta d\varphi = \frac{M^2}{2E \cdot Uy \cdot r} ds_0 \quad (3.14)$$

Pokud nyní začne působit i síla normálová  $N$ , pak dojde k tomu, že se prodlouží všechna vlákna v určitém poměru. Pro jednodušší odvození vyjdeme ze vztahu pro objemovou hustotu.

$$\lambda = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon \quad (3.15)$$

Jelikož normálová síla vyvolává, jak už bylo řečeno výše, tahové napětí, vzorec pro jeho výpočet nám poslouží jako základ, ze kterého získáme rovnici pro energii napjatosti normálové síly.

$$\sigma_N = \frac{N}{S} \quad (3.16)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds_0}{ds_0} = \frac{R \cdot \Delta d\varphi}{R \cdot d\varphi} = \frac{\sigma}{E} \quad (3.17)$$

$$\lambda_N = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{E} = \frac{N^2}{2ES^2} \quad (3.18)$$

Tímto jsme získali rovnici pro objemovou hustotu při normálovém napětí. Jelikož víme, že normálové napětí je rozloženo rovnoměrně, pak úpravou získáme energii napjatosti.

$$dU_2 = \lambda^2 \cdot dV = \lambda^2 \cdot S \cdot ds_0 = \frac{N^2}{2ES^2} \cdot S \cdot ds_0 = \frac{N^2}{2ES} \cdot ds_0 \quad (3.19)$$



Posouvající síla  $T$  vyvodí energii napjatosti, kterou lze určit z tečných napětí a její výpočet je obdobný jako u normálové síly s tím rozdílem, že modul pružnosti v tahu  $E$  nahradíme modulem pružnosti ve smyku  $G$  a vynásobíme tečnou sílu  $T$  koeficientem  $\beta$ , což je bezrozměrný činitel, který je závislý na tvaru průřezu.

$$dU_3 = \beta \cdot \frac{T^2}{2GS} ds_0 \quad (3.20)$$

Je důležité také podotknout, že při působení normálové síly  $N$  se v závislosti na prodloužení vláken spotřebuje deformační práce ohybového momentu.

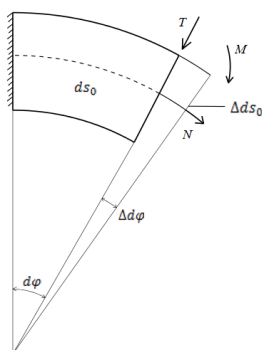
$$dU_4 = M \cdot d\varphi_N = M \cdot \frac{\sigma}{E} d\varphi = \frac{MN}{ESR} \cdot ds_0 \quad (3.21)$$

Výsledná energie napjatosti v křivém prutu při rovinném ohybu je tedy:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \quad (3.22.1)$$

$$U = \frac{M^2}{2E \cdot U_y \cdot r} ds_0 + \frac{N^2}{2ES} \cdot ds_0 + \beta \cdot \frac{T^2}{2GS} ds_0 + \frac{MN}{ESR} \cdot ds_0 \quad (3.22.2)$$

Pokud určíme výslednou energii napjatosti, dopočítat jakoukoliv deformaci je již snadné.[1]



Obrázek č. 28 – Vyobrazení kombinovaného namáhání a elementu křivého prutu

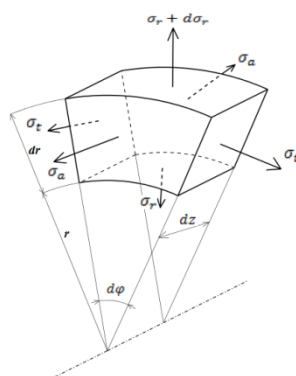
### 3.2. Teorie tlustostěnných nádob:

Mluvíme-li v pružnosti a pevnosti o nádobách, zahrnujeme pod tento termín všechny strojní součásti, jenž už svým tvarem, či charakterem namáhání jsou stejné, jako dutá tělesa namáhaná vnitřním nebo vnějším přetlakem. Proto tedy za nádobu považujeme potrubí, kroužek nalisovaný na hřídeli, kotlová tělesa, tlakové nádoby či v našem případě kovopryžové pouzdro stabilizátoru. Při výpočtech takovýchto těles, je velmi důležité rozlišovat nádoby tenkostěnné a tlustostěnné. Je tomu tak zejména proto, že za tenkostěnnou nádobu považujeme takovou nádobu,

která má tloušťku stěny o hodně menší, že jsou ostatní rozměry nádoby (například průměr). U tenkostěnných nádob můžeme tedy předpokládat, že napětí je ve stěně rozloženo rovnoměrně. Největší možnou tloušťku, při které se dá nádoba považovat za tenkostěnnou, je možno zjistit určením přípustné chyby ve velikosti napětí při zanedbání tlustostěnnosti. Napětí v tlustostěnných nádobách, je totiž určeno rovnicí hyperboly. Největší rozdíl mezi tlustostěnnou a tenkostěnnou nádobou je tedy rozložení napětí podél tloušťky stěny. Dalším rozdílem je také to, že u uzavřených tlustostěnných nádob, vzniká trojosý napěťový stav a u tenkostěnných tomu tak není, jelikož tam vzniká pouze dvouosý napěťový stav. [2]

### 3.2.1. Stav napjatosti prvku válcové tlustostěnné nádoby

Jelikož v technické praxi bývají součásti tvarově dosti složité, využívá se k usnadnění výpočtu zjednodušení na válcový tvar nádoby. Při tomto zjednodušení se následně využívá válcový souřadný systém. Počátečním krokem při určování napjatosti je vyjmutí prvku (elementu) nádoby, u čehož musí být dodrženy zásady metody řezu. Vznikne šestistěnný elementární hranolek, na jehož stěnách je nutné nahradit části nádoby odstraněné řezem vnitřními silami, jimiž na hranolek působí okolí prvku. Díky této teorii můžeme stanovit dvě skutečnosti. První je ta, že všechny stěny mají nekonečně malou plochu, a tak napětí které na nich působí budou rovnoměrně rozložená. Druhou skutečností je to, že řešená úloha je povětšinou osově symetrická, a tak nemůže dojít při deformaci prvku ke zkosení. Na stěnách tedy nevznikají žádná smyková napětí. Díky těmto skutečnostem má elementární hranolek uvažovaný v tomto odvození trojosý stav napjatosti, který je určen hlavními napětími  $\sigma_t, \sigma_r, \sigma_a$ , což vyplývá z následujícího obrázku. [2]



Obrázek č 29 – Elementární hranolek tlustostěnných nádob

Dle jejich orientace můžeme tato hlavní napětí nazývat radiální, obvodové (tečné) a osové (axiální). Osově napětí  $\sigma_a$  můžeme při výpočtu považovat za konstantní, pokud je řez vedený dostatečně daleko ode dna či víka nádoby. V postačující vzdálenosti ode dna či víka je jejich vyztužující vliv zanedbatelný a plášť se tak deformuje jako nekonečně dlouhý válec. U nějž poměrné prodloužení vláken je konstantní. A jako takové lze považovat i napětí. Lze jej určit jako prostý tah či tlak:

$$\sigma_a = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (3.23)$$

tento tvar platí například pro válcovou nádobu s uzavřeným dnem.[2]

Naopak zbylá dvě hlavní napětí nejsou ve tloušťce stěny rozložena rovnoměrně, jelikož jsou funkcemi poloměru. Lze je tedy zapsat takto:

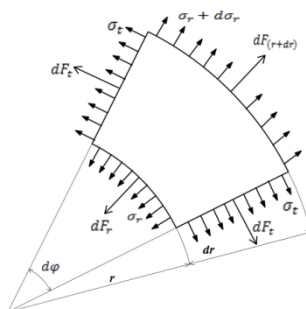
$$\sigma_t = \sigma_t(r), \quad \sigma_r = \sigma_r(r).$$

### 3.2.2. Základní soustava rovnic pro řešení tlustostěnných válcových nádob

Základními rovnicemi pro vyjádření obecného řešení tlustostěnných válcových nádob jsou tak, jako v obecné matematické teorii pružnosti rovnice rovnováhy prvku nádoby neboli Navierovy rovnice, Cauchyovy rovnice, což jsou geometrické rovnice, jenž vyjadřují vztahy mezi posuvem a deformací, rovnice kompatibility a fyzikální rovnice, které jsou vyjádřené za pomoci Hookeova zákona. [2]

#### Navierovy rovnice

Jelikož hlavní napětí v axiálním směru považujeme za známé, můžeme elementární prvek nádoby uvažovat dle obrázku č. 30 přičemž délka prvku ve směru podélné osy je rovna 1. Kde jsou rovněž zobrazeny silové účinky okolí, které bylo odstraněno při řezání.



Obrázek č. 30 – Elementární krychlička s dz=1

Vnitřní síly, jenž působí na stěnách elementárního hranolku, jsou dány těmito výrazy:

$$dF_t = \sigma_t \cdot dr, \quad (3.24)$$

$$dF_r = \sigma_r \cdot r d\varphi, \quad (3.25)$$

$$dF_{(r+dr)} = (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi. \quad (3.26)$$

Pokud vyjádříme podmínku rovnováhy elementárního hranolku graficky, dostaneme uzavřený silový obrazec při smyslech všech sil za sebou. V tomto silovém obrazci svírají dvě síly  $dF_t$  nekonečně malý úhel  $d\varphi$ . A aniž by došlo ke vzniku nepřipustné chyby, můžeme vyjádřit délku elementárního obloučku o poloměru  $dF_t$  sevřeného úhlem  $d\varphi$ . Chceme-li vyjádřit podmínku rovnováhy prvku v radiálním směru vycházíme z geometrických vztahů.

$$dF_t d\varphi + dF_r - dF_{(r+dr)} = 0 \quad (3.27)$$

Pokud do této rovnice dosadíme hodnoty elementárních vnitřních sil a následně ji upravíme, získáme tento výraz

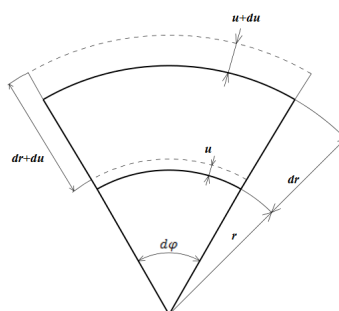
$$\sigma_t dr - d\sigma_r r - \sigma_r dr - d\sigma_r dr = 0. \quad (3.28.1)$$

Pokud tuto rovnici budeme dále upravovat, a to vydělením celé rovnice  $dr$ , získáme Navierovu rovnici rovnováhy elementárního hranolku v radiálním směru [2]

$$\sigma_t - \sigma_r - r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (3.28.2)$$

### Cauchyovy rovnice

Tyto rovnice vyjadřují vztah mezi posuvem a poměrnou deformací, lze je odvodit, tak jako Navierovy rovnice, z geometrických závislostí elementárního hranolku. Vycházíme-li z představy deformace od předpokládaných kladných hodnot hlavních napětí  $\sigma_r$  a  $\sigma_t$ , pak sloučitelnost deformací ve směru radiálním a obvodovém je podmíněna tím, aby nedošlo ke změně úhlu  $d\varphi$ , což je úhel, který svírají dvě soumžné řezové roviny. Znamená to, že dojde k prodloužení všech radiálních i obvodových vláken uvažovaného hranolku, ale nedojde ke změně úhlu. Tato skutečnost je vyobrazena na následujícím obrázku č.31.



Obrázek č. 31 – Znárodnění deformace elementu tlustostěnné nádoby

Kde se vlákno na poloměru při deformaci posune radiálně o hodnotu posuvu  $u$ . Jelikož je přemístění rovněž funkcí polohy vlákna (dané souřadnice  $r$ ), hodnota přemístění vlákna pak je na poloměru  $r + dr$  rovna  $u + du$ . Můžeme tedy říci, že elementární hranolek s radiálním rozměrem  $dr$  se prodlouží v tomto směru na  $dr + du$ .

Poměrné prodloužení elementárního hranolu v radiálním směru můžeme tedy napsat v tomto tvaru:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}. \quad (3.29)$$

Pokud chceme vyjádřit rovnici pro poměrné prodloužení hranolku v obvodovém směru, vycházíme také z obrázku č. 31 a rovnice vypadá následovně: [2]

$$\varepsilon_t = \frac{(r+u)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{u}{r}. \quad (3.30)$$

### Rovnice kompatibility

V případě tlustostěnných válců se podmínka spojitosti dá vyjádřit vcelku jednoduše, jsou-li obě složky poměrné deformace  $\varepsilon_t$  a  $\varepsilon_r$  posuvu  $u$ . Dále pokud provedeme derivaci dle proměnného poloměru  $r$  u funkce  $\varepsilon_t$ , dostaneme výraz

$$\frac{d\varepsilon_t}{dr} = \frac{\frac{du}{dr}r - u}{r^2}. \quad (3.31.1)$$

Pokud vydělíme zlomek na pravé straně rovnice hodnotou  $r$ , můžeme rovnici dále přepsat do tvaru

$$\frac{d\varepsilon_t}{dr} = \frac{\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}}{r}, \quad (3.31.2)$$

Nyní, pokud přihlídneme k Cauchyovým rovnicím, můžeme výslednou rovnici sepsat ve tvaru, ve kterém je eliminováno přemístění  $u$  a který je konečným tvarem spojitosti deformací (rovnice kompatibility: [2])

$$\frac{d\varepsilon_t}{dr} = \frac{1}{r} \cdot (\varepsilon_r - \varepsilon_t). \quad (3.31.3)$$

### Fyzikální rovnice

Fyzikální rovnice lze vyjádřit za využití obecného Hookeova zákonu pro poměrné deformace  $\varepsilon_r$  a  $\varepsilon_t$  ve směru radiálním a obvodovém. V těchto rovnicích však musíme myslet na to, že hlavní napětí  $\sigma_r$  a  $\sigma_t$  jsou funkcemi polohy bodu, což znamená, že jsou to funkce proměnného poloměru  $r$ . Osová napětí jsou naproti tomu konstantní. [2]

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} [\sigma_t - \mu(\sigma_r + \sigma_a)] \quad (3.32.1)$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_t + \sigma_a)] \quad (3.32.2)$$

### 3.2.3. Rozložení hlavních napětí ve stěně tlustostěnné nádoby

Pokud bychom vyřešili obecný tlustostěnný válec, získáme rovnice, ze kterých jde velmi snadno vyjádřit funkce, které určují rozložení hlavních napětí  $\sigma_r$  a  $\sigma_t$  ve stěně nádoby.

$$\sigma_r = C_1 \pm \frac{C_2}{r^2} \quad (3.33)$$

$$\sigma_t = C_1 \mp \frac{C_2}{r^2} \quad (3.34)$$

V těchto rovnicích je vždy nutné pro daný problém určit z okrajových podmínek hodnoty obou integračních konstant  $C_1$  a  $C_2$ . Pakliže bychom vykreslili křivky z obou výše napsaných rovnic, zjistíme, že průběh obou napětí  $\sigma_r$  a  $\sigma_t$  je hyperbola 2. stupně jejíž tvar určuje druhý člen na pravé straně rovnice. První člen určuje případné posunutí křivky ve směru souřadného systému v němž jsou hodnoty napětí vynášeny. [2]

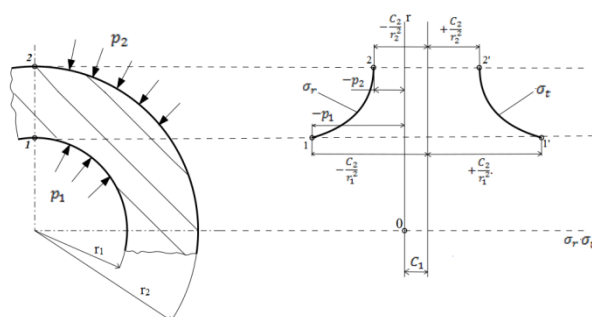
U nádoby, která je namáhána vnitřním i vnějším přetlakem, jak je tomu na obrázku výše, se integrační konstanty vypočítají ze zavedených okrajových podmínek. Jimiž jsou vnitřní i vnější přetlak působící na nádobu. [2]

Vypíšeme-li si okrajové podmínky, pak jsou dány těmito vztahy:

$$\text{a) pro } r = r_1 \quad \sigma_r = -p_1$$

$$\text{b) pro } r = r_2 \quad \sigma_r = -p_2$$

Pokud tyto podmínky vložíme do rovnice pro výpočet radiálního napětí  $\sigma_r$ , je možné je upravit na tento tvar:



Obrázek č. 32 – Znázornění průběhu napětí ve stěně tlustostěnné nádoby

$$\text{a) } C_1 - \frac{C_2}{r_1^2} = -p_1,$$

$$\text{b) } C_1 - \frac{C_2}{r_2^2} = -p_2.$$

Pokud se nyní na tyto dvě rovnice podíváme, zjistíme, že jsme získali soustavu dvou rovnic o dvou neznámých  $C_1$  a  $C_2$ . Vyřešením této soustavy získáme rovnice vyjadřující hodnoty integračních konstant

$$C_1 = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (3.35)$$

$$C_2 = \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (3.36)$$

Srovnáme-li nyní rovnici pro integrační konstanty  $C_1$ , a rovnici pro axiální napětí  $\sigma_a$  u nádob s uzavřeným dnem. Zjistíme, že mají stejnou hodnotu a můžeme tedy rovnou napsat, že  $C_1 = \sigma_a$  v případě nádob s uzavřeným dnem. U otevřených nádob je hodnota integrační konstanty stejná, jako by vyšla v případě, že je nádoba opatřena smyšleným dnem. [2]

Máme-li úlohu zadanou numericky, pak vyřešením konstant  $C_1$  a  $C_2$  jsme schopni vynést graficky průběhy obou hlavních napětí  $\sigma_r$  a  $\sigma_t$ , jak je znázorněno na obrázku č. 32. Z těchto průběhů jsme schopni určit, že nejvíce namáhaným bodem tlustostěnného válce je každý bod na vnitřním válcovém plášti nádoby. Extrémní hodnoty napětí  $\sigma_r$  a  $\sigma_t$  v bodě  $r = r_1$  jsou pro otevřenou nádobu určeny těmito výrazy:

$$\sigma_{r(r=r_1)} = C_1 - \frac{C_2}{r_1^2} = -p_1, \quad (3.37)$$

$$\sigma_{t(r=r_1)} = C_1 + \frac{C_2}{r_1^2}. \quad (3.38)$$

Pro uzavřenou nádobu je nutné uvážit trojosý napěťový stav, pak jsou hodnoty hlavních napětí dány takto:

$$\sigma_{r(r=r_1)} = -p_1, \quad (3.39)$$

$$\sigma_{t(r=r_1)} = C_1 + \frac{C_2}{r_1^2}, \quad (3.40)$$

$$\sigma_a = C_1. \quad (3.41)$$

### 3.2.4. Změna poloměrů tlustostěnné nádoby

Působí-li na vnitřní a vnější válcový plášť nádoby tlak (obrázek č. 32), dojde k jejímu zdeformování, což se projevuje zejména změnou poloměrů. Při deformování dochází ke změně obvodu každého vlákna, které je soustředné s okrajovými plášti o poloměrech  $r_1$  a  $r_2$ . Jelikož je obvod kruhových vláken přímo úměrný přírůstku jejich poloměrů, můžeme říci, že platí tento vztah:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta r}{r}. \quad (3.42)$$

Kde  $\varepsilon_t$  je poměrná deformace v obvodovém směru. Tuto rovnici bychom mohli také odvodit za pomoci již dříve zmíněných Cauchových rovnic, kde má tvar:

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}, \quad (3.43)$$

v tomto případě je  $u$  přemístěním vlákna v radiálním směru. Proto můžeme tuto rovnici zapsat i tímto způsobem:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta r}{r} = \frac{u}{r}. \quad (3.44)$$

Pokud bychom chtěli rovnici pro změnu poloměru u obecného kruhového vlákna, vypadala by takto:

$$\Delta r = r\varepsilon_t = \frac{r}{E}[\sigma_t - \mu(\sigma_r + \sigma_a)]. \quad (3.45)$$

Za  $\varepsilon_t$  dosadíme poměrnou deformaci definovanou rovnicí uvedenou výše u Fyzikálních rovnic za využití Hookeova zákona.

Změnu krajních poloměrů je tedy dle výše uvedené rovnice určena takto:

$$\Delta r_1 = \frac{r_1}{E}(\sigma_{t1} - \mu\sigma_{r1}) = \frac{r_1}{E}\left(C_1 + \frac{C_2}{r_1^2} + \mu p_1\right), \quad (3.46.1)$$

$$\Delta r_2 = \frac{r_2}{E}(\sigma_{t2} - \mu\sigma_{r2}) = \frac{r_2}{E}\left(C_1 + \frac{C_2}{r_2^2} + \mu p_2\right), \quad (3.47.1)$$

což jsou vztahy, které platí pro otevřenou nádobu. Pro uzavřenou nádobu by rovnice byly rozšířeny do tohoto tvaru:

$$\Delta r_1 = \frac{r_1}{E}[\sigma_{t1} - \mu(\sigma_{r1} + \sigma_a)] = \frac{r_1}{E}\left[C_1(1 - \mu) + \frac{C_2}{r_1^2} + \mu p_1\right] \quad (3.46.2)$$

$$\Delta r_2 = \frac{r_2}{E}[\sigma_{t2} - \mu(\sigma_{r2} + \sigma_a)] = \frac{r_2}{E}\left[C_1(1 - \mu) + \frac{C_2}{r_2^2} + \mu p_2\right] \quad (3.47.2)$$

Při užívání těchto rovnic, je nutné dosazovat za tlaky  $p_1$  a  $p_2$  absolutní hodnoty těchto tlaků. Integrační konstanty je však nutné dosazovat se znaménky, které jim přísluší, pokud pak vyjde  $\Delta r > 0$  jedná se o zvětšení poloměru, vyjde li číslo menší než 0 pak o zmenšení. [2]

### 3.2.5. Víceplášťové tlustostěnné nádoby

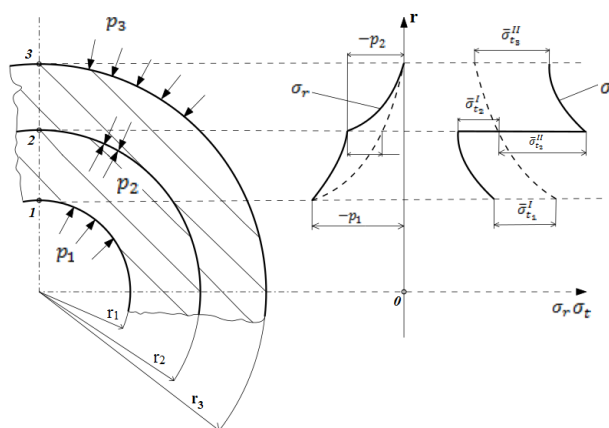
Pokud bychom chtěli dosáhnout výhodnějšího rozložení napětí ve stěně tlustostěnného válce, musela by být nádoba zkonstruována tak, aby se její plášť skládal ze dvou i více dutých válců. Dosáhli bychom takto i lepších mechanických vlastností. Napojení více dutých válců na sebe lze dosáhnout více způsoby, pro představu například nalisováním nebo nasazením za tepla vytvoříme tak přesah, který na stykové válcové ploše obou válců vytvoří tlakové předpětí. Toto předpětí na vnějším válci napětí zvyšuje a naopak na vnitřním válci jej snižuje jelikož vnitřní válec je předpětím stlačován a vnější roztahován. Výsledné rozložení napětí od tlakového namáhání nádoby a od předpětí vzniklého ve stykové ploše válců je rovnoměrnější, což napomáhá lepšímu využití materiálu. [2]

Řešíme-li rozložení hlavních napětí  $\sigma_r$  a  $\sigma_t$  u otevřené dvouplášťové nádoby známých rozměrů, u které je předepsán tlak od předpětí, vnitřní i vnější tlak, je možné využít principu superpozice napětí. Jako první se tedy vypočítá rozložení hlavních napětí v obou pláštích. Poté už



je možné složenou nádobu řešit jako jednoduchou. Pro získání výsledného rozložení napětí je však nutné provést algebraický součet jednotlivých napětí na všech poloměrech oné nádoby. Tento postup si můžeme naznačit pomocí obrázku č. 33. [2]

Zaměříme-li se více na onen obrázek, pak zjistíme, že se jedná o dvouplášťovou nádobu, namáhanou vnitřním tlakem  $p_1$ , vnější tlak, který působí na nádobu  $p_3$  je roven 0. Tlak  $p_2$  představuje předpětí na stykové ploše. Pro výpočet musíme řešit napětí ve vnější i vnitřní nádobě zvlášť. Nejprve bychom tedy vypočítali napětí od předpětí na vnitřní i vnější nádobě, kde by se

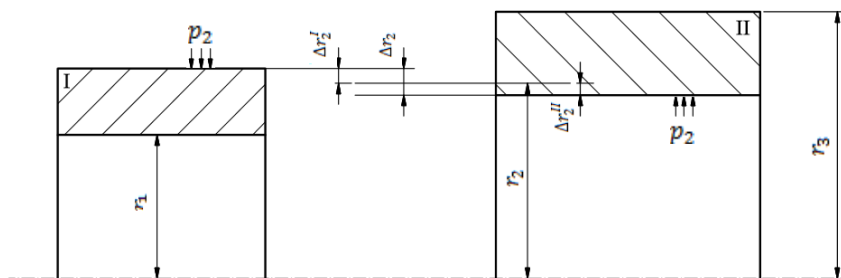


však museli správně aplikovat okrajové podmínky. Poté už by se řešila složená nádoba jakožto celek. Ve zkratce to znamená to, že by se musel provést algebraický výpočet napětí na základně zákonu superpozice. Jednalo by se tedy o součet napětí od vnějšího zatížení (tlak  $p_1$ ) a od předpětí vzniklého na stykové ploše nádob  $p_2$ . [2]

Obrázek č. 33 – Průběh napětí ve víceplášťové nádobě

### 3.2.6. Výpočet přesahu pro získání předpětí u nalisované nádoby

Ke spojení dvou nádob do jedné víceplášťové nádoby dochází povětšinou nalisováním, či natažením za tepla. V obou případech dojde ke vzniku přesahu a na stykové ploše těchto nádob se vytvoří předpětí. Dáme-li si za cíl vypočítat potřebný přesah poloměrů  $\Delta r_2$  takový, aby v nádobě, která není zatížena vnitřním tlakem  $p_1$ , působil na stykové ploše měrný tlak  $p_2$ , postupujeme následovně. Rozměry obou nádob před nalisováním jsou znázorněny na následujícím obrázku. Z něhož je rovněž možno vyčíst, že celkový přesah  $\Delta r_2$  je roven součtu absolutních dílčích změn poloměru  $r_2$  pro I i II nádobu:  $\Delta r_2 = |\Delta r_2^I| + \Delta r_2^{II}$



Obrázek č. 34 – Znázornění přesahu

Jelikož je v případě I. nádoby změna poloměru vždy záporná, je jeho absolutní hodnota rovna záporně vzaté deformaci. Tuto deformaci můžeme vyjádřit za pomoci obecného Hookeova zákona (jenž je uveden výše). Pokud dosadím v případě otevřené nádoby  $\sigma_a = 0$ , upravením upraveného Hookeova zákona získáme rovnici pro deformaci  $\Delta r_2^I$

$$\Delta r_2^I = \frac{r_2}{E} \left( \overline{C}_1^I + \frac{\overline{C}_2^I}{r_2^2} + \mu p_2 \right). \quad (3.48)$$

Pokud bychom dosadili okrajové podmínky, získali bychom integrační konstanty dané těmito výrazy:

$$\overline{C}_1^I = -\frac{p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad \overline{C}_2^I = -\frac{p_2 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (3.49)$$

Stejným způsobem jsme schopni získat rovnici pro deformaci  $\Delta r_2^{II}$ :

$$\Delta r_2^{II} = \frac{r_2}{E} \left( \overline{C}_1^{II} + \frac{\overline{C}_2^{II}}{r_2^2} + \mu p_2 \right). \quad (3.50)$$

Integrační konstanty budou mít tyto hodnoty:

$$\overline{C}_1^{II} = -\frac{p_2 r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}, \quad \overline{C}_2^{II} = -\frac{p_2 r_2^2 r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (2.51)$$

Pro získání celkového přesahu už stačí jen dát všechny získané rovnice dohromady a upravit je na výsledný tvar:

$$\Delta r_2 = \frac{2p_2 r_2^3}{E} \frac{r_3^2 - r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2)(r_3^2 - r_2^2)}. \quad (3.52)$$

V případě, že jsou nádoby z různého materiálu a jejich hodnoty modulu pružnosti v tahu jsou rozdílné  $E_I$  a  $E_{II}$  a taktéž jejich hodnoty Poissonových konstant jsou rozdílné  $\mu_I$  a  $\mu_{II}$ , můžeme odvodit pro přesah poloměrů  $\Delta r_2$  výraz: [2]

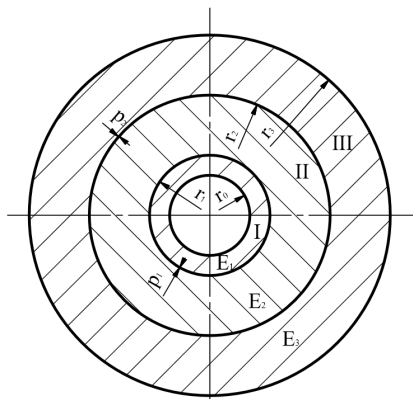
$$\Delta r_2 = p_2 r_2 \left[ \frac{1}{E_I} \frac{r_2^2(1 - \mu_I) + r_1^2(1 + \mu_I)}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{1}{E_{II}} \frac{r_3^2(1 - \mu_{II}) + r_2^2(1 + \mu_{II})}{r_3^2 - r_2^2} \right]. \quad (3.53)$$

## 4 Analytické řešení

Pokud se nyní zaměříme na analytické řešení pružné svorky stabilizátoru, zjistíme, že by bylo velmi složité. A bez užití metody konečných prvků velmi zdoluhavé a pracné. Pro jeho usnadnění zadané tvary zjednodušíme na obecnější, které budeme moci vyřešit snáze. Nevýhodou tohoto zjednodušení je však fakt, že vypočtené hodnoty budou obsahovat určitou chybu oproti reálným výsledkům. Pokud však tato chyba vyjde v určitém rozmezí, budeme moci brát zjednodušený analytický výpočet jako přibližně správný.

V prvotní myšlence zjednodušení si představíme spojení stabilizátor-pryžová objímka-svorka jako tlustostěnnou nádobu, která je složena z více nádob, přesněji ze tří. Vzhledem k tomu, že je zadaným úkolem zjistit deformace právě na kovové svorce, bylo by toto řešení ještě velmi nepřesné. Jelikož teorie tlustostěnných nádob počítá zejména s válcovými nádobami a zadaný problém nemá čistě válcový tvar. Ve druhotní myšlence tedy třetí nádobu-kovovou svorku, nahradíme křivým prutem. Teorie křivých prutů již dovoluje výpočet součástí s většími tvarovými rozmanitostmi. U křivého prutu je také výhodou, že se dá vcelku snadno za užití Castiglianovy věty určit průhyb prutu či jeho natočení a právě průhyb křivého prutu bude brán jako deformace svorky stabilizátoru.

### 4.1. Zjednodušení na problém tlustostěnných nádob



Obrázek č 35 – zjednodušené tlustostěnné nádoby

Jak již bylo uvedeno výše, tak pro výpočet využijeme zjednodušené zadání ve formě tlustostěnných nádob. Jelikož kovopryžové ukotvení stabilizátoru se skládá ze tří hlavních komponentů, včetně samotného stabilizátoru, tak i náš zjednodušený „model“ se bude skládat ze tří nádob viz obrázek č. 35, kde je ono zjednodušení ukázáno.

Pokud si nyní toto zjednodušené schéma rozebereme, tak:

Nádoba I - je samotný stabilizátor s daným modulem pružnosti  $E_1$  a Poissonovým číslem  $\mu_1$ . Pokud by se jednalo o trubkový stabilizátor, tak průměr  $r_0$  bude mít určitou hodnotu, pokud by však šlo o stabilizátor tyčový s plným průřezem, pak hodnota poloměru  $r_0$  by byla rovna 0.

Nádoba II - je pryžová objímka stabilizátoru s daným modulem pružnosti  $E_2$  a Poissonovým číslem  $\mu_2$  jejímž přičiněním se po sestavení kovopryžové svorky kovová svorka zdeformuje.

Nádoba III - je nahrazená kovová svorka stabilizátoru s daným modulem pružnosti  $E_3$  a Poissonovým číslem  $\mu_3$ .

Tlak  $p_1$  - je předpětí, které vznikne na stykové ploše mezi stabilizátorem a pryžovou objímkou po nalisování.

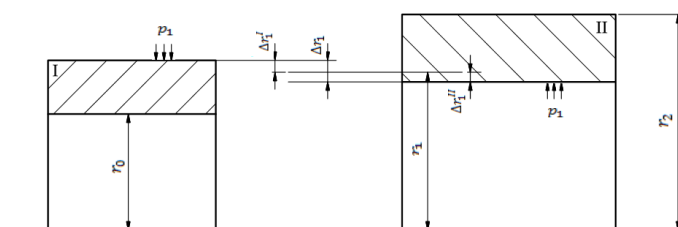
Tlak  $p_2$  - je předpětí, které vznikne na stykové ploše po nalisování stabilizátoru s pryžovou objímkou do kovové svorky.

#### 4.1.1. Určení předpětí $p_1$

Jelikož rozměrové hodnoty a hodnoty materiálových konstant známe pak jednou z hodnot nutných pro další výpočet je předpětí  $p_1$ . To zjistíme z přesahu již zadaných rozměrů. Jelikož stabilizátor má poloměr průřezu větší než pryžová objímka, dojde po nalisování k jeho stlačení/zmenšení. Naopak u pryžové objímky dojde k roztahení/zvětšení rozměrů. Tuto změnu rozměrů nazýváme přesahem, a je vždy složen z absolutní hodnoty změny poloměru stabilizátoru a změny poloměru pryžové objímky, jak bylo uvedeno výše v teoretické části, platí tento vztah:

$$\Delta r_1 = |\Delta r_1^I| + \Delta r_1^{II}, \quad (4.1)$$

jak je znázorněno na následujícím obrázku:



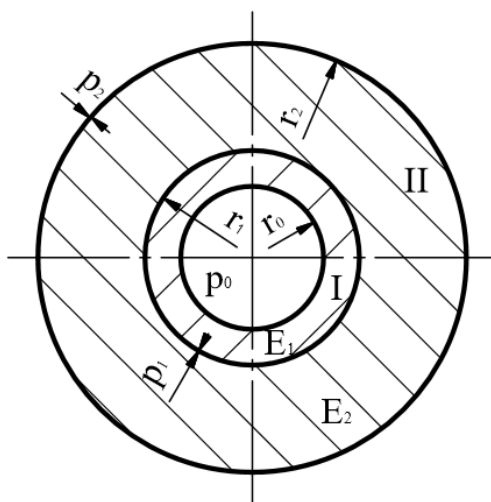
Obrázek č.36 – Znázornění přesahu

Protože však známe pouze hodnotu přesahu a ne vlastní poloměr  $r_1$ , musíme ho zjistit také. Čehož dosáhneme tím, že si vytvoříme soustavu rovnic o dvou neznámých, kde první neznámou bude onen poloměr  $r_1$  a druhou neznámou cílené předpětí  $p_1$ . Abychom byli schopni vytvořit tuto

soustavu, musíme si nejprve určit vzorce pro deformace poloměru  $r_1$  první nádoby  $\Delta r_1^I$  a deformaci poloměru  $r_1$  druhé nádoby  $\Delta r_1^{II}$ .

Důležité je také zvolit správně okrajové podmínky, pro výpočet předpětí  $p_1$ , je tlak  $p_0$  na vnitřní straně I. nádoby roven 0. A tlak  $p_2$  na vnější straně II. nádoby je rovněž zatím roven 0, protože pryžová objímka zatím není nalisována do svorky.

$$p_0 = 0 \text{ Ml} \quad , \quad p_2 = 0 \text{ Ml}$$



Obrázek č 37 – Naznačení tlaků jenž působí na nádobu

Pokud máme definované okrajové podmínky, je možné vypsát rovnice pro deformace poloměrů  $\Delta r_1^I$  a  $\Delta r_1^{II}$ , za pomoci obecného Hookeova zákonu.

$$\Delta r_1^I = \frac{r_1}{E_1} \left( C_1 + \frac{C_2}{r_1^2} + \mu_1 p_1 \right) \quad (4.2)$$

$$\Delta r_1^{II} = \frac{r_1}{E_2} \left( C_1 + \frac{C_2}{r_1^2} + \mu_2 p_1 \right) \quad (4.3)$$

Nyní je potřeba určit integrační konstanty  $C_1$  a  $C_2$ , jenž budou pro každý výpočet jiné. Tyto konstanty určíme za pomoci obrázku č 34.

Pro  $\Delta r_1^I$ :

$$C_1 = \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \quad (4.4)$$

Jelikož však tlak  $p_0$  na vnitřní straně stabilizátoru je roven 0, pak můžeme tuto rovnici upravit na tento tvar:

$$C_1 = -\frac{p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}. \quad (4.5)$$

Druhou integrační konstantu získáme z tohoto vzorce, který po dosazení okrajových podmínek také upravíme.

$$C_2 = \frac{(p_0 - p_1)r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \quad (4.6.1)$$

$$C_2 = \frac{-p_1 r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \quad (4.6.2)$$

Pro  $\Delta r_1^{II}$ :

$$C_1 = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (4.7.1)$$

Protože nyní uvažujeme, že pryžová objímka není vsazená do svorky, tak tlak  $p_2 = 0 \text{ MPa}$ .  
Můžeme tedy rovnici pro integrační konstantu upravit takto:

$$C_1 = \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (4.7.2)$$

A následně  $C_2$  za stejného předpokladu nulového tlaku  $p_2$

$$C_2 = \frac{(p_1 - p_2)r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (4.8.1)$$

$$C_2 = \frac{p_1 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (4.8.2)$$

Nyní můžeme získané rovnice pro integrační konstanty vložit do rovnic deformace poloměrů  $r_1$ .

Pro poloměr  $r_1$  první nádoby (stabilizátoru), vypadá rozepsaná rovnice deformace takto:

$$\Delta r_1^I = \frac{r_1}{E_1} \left( -\frac{p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{\frac{-p_1 r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}}{r_1^2} + \mu_1 p_1 \right). \quad (4.9)$$

Pro poloměr  $r_1$  druhé nádoby (pryžové objímky) pak takto:

$$\Delta r_1^{II} = \frac{r_1}{E_2} \left( \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{\frac{p_1 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}}{r_1^2} + \mu_2 p_1 \right). \quad (4.10)$$

Když obě tyto rovnice dosadíme do rovnice č. (4.1) pro přesah, získáme první rovnici soustavy dvou rovnic o dvou neznámých.

$$\Delta r_1 = \left| \frac{r_1}{E_1} \left( -\frac{p_1 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{\frac{-p_1 r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}}{r_1^2} + \mu_1 p_1 \right) \right| + \frac{r_1}{E_2} \left( \frac{p_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{\frac{p_1 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}}{r_1^2} + \mu_2 p_1 \right). \quad (4.11)$$

Jako druhá rovnice nám poslouží přímo rovnice pro výpočet přesahu z daného předpětí pro dvě nádoby z různých materiálů jenž byla uvedena v teorii

$$\Delta r_1 = p_1 r_1 \left[ \frac{1}{E_1} \frac{r_1^2(1 - \mu_1) + r_0^2(1 + \mu_1)}{r_1^2 - r_0^2} + \frac{1}{E_2} \frac{r_2^2(1 - \mu_2) + r_1^2(1 + \mu_2)}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \quad (4.12)$$

Pokud nyní tuto soustavu vyřešíme, získáme hodnoty pro neznámý poloměr  $r_1$  a předpětí  $p_1$ .

#### 4.1.2. Určení předpětí $p_2$

V předchozí části jsme stanovili rovnice, ze kterých je možné vypočítat předpětí  $p_1$  a poloměr  $r_1$ , tyto veličiny nyní můžeme využít při zjišťování předpětí  $p_2$ , což je tlak, kterým působí stabilizátorem roztažená pryžová objímka na kovovou svorku. Tento tlak je kritický pro další výpočty a proto jej musíme stanovit. Využijeme u toho obdobného postupu jako při zjišťování předpětí  $p_1$  s tím rozdílem, že přesah, kterým se vyvodí ono hledané předpětí, zjistíme z rozdílu poloměru  $\bar{r}_2^{II}$ , což je vnější poloměr pryžové objímky, který je roztažený tlakem  $p_1$  a poloměru  $r_2^{III}$ , což je vnitřní poloměr kovové svorky. Zvětšený poloměr  $\bar{r}_2^{II}$  získáme součtem původní velikosti poloměru  $\bar{r}_2$  a jeho deformací  $\Delta \bar{r}_2^{II}$  za působení tlaku  $p_1$ . Předpokládáme totiž, že tlak působící na vnější poloměr pryžové objímky je prozatím nulový, tedy  $p_2 = 0 \text{ MPa}$ .

$$\bar{r}_2^{II} = \bar{r}_2 + \Delta \bar{r}_2^{II} \quad (4.13)$$

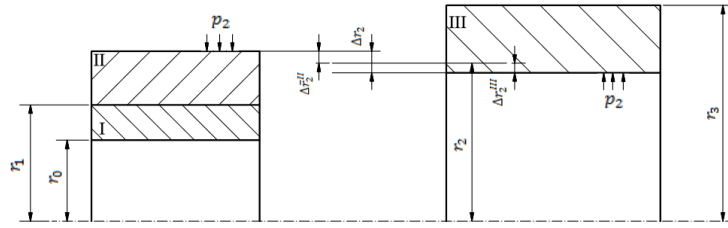
$$\Delta \bar{r}_2^{II} = \frac{\bar{r}_2}{E_2} \left( \frac{p_1 r_1^2}{\bar{r}_2^2 - r_1^2} + \frac{\frac{p_1 r_1^2 \bar{r}_2^2}{\bar{r}_2^2 - r_1^2}}{\bar{r}_2^2} \right) \quad (4.14)$$

Protože využijeme stejného postupu jako u předpětí  $p_1$ , vycházíme tedy i ze stejných myšlenek. Tedy, že přesah  $\Delta r_2$  je dán deformací poloměrů  $\Delta \bar{r}_2^{II}$  a  $\Delta r_2^{III}$ .

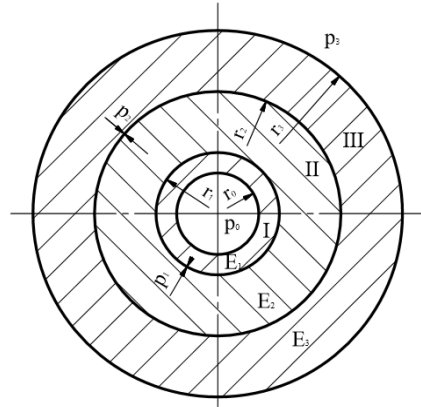
$$\Delta r_2 = |\Delta \bar{r}_2^{II}| + \Delta r_2^{III} \quad (4.15)$$

Jak je vyobrazeno na obrázku č. 38.

Jelikož jsme však schopni zjistit pouze přesah  $\Delta r_2$ , ale neznáme pravou hodnotu poloměru  $r_2$ , budeme obdobně jako u prvního předpětí využívat soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Kde jednou neznámou bude onen poloměr  $r_2$  a druhou bude hledané předpětí  $p_2$ . Postupovat budeme stejným způsobem a nejdříve si tedy zjistíme rovnice pro deformace poloměrů  $\Delta \bar{r}_2^{II}$  a  $\Delta r_2^{III}$ . Čehož dosáhneme správným zvolením okrajových podmínek a následným vypsáním rovnic pro integrační konstanty  $C_1$  a  $C_2$  pro obě deformace.



Obrázek č. 38 – Přesah mezi II: a III. nádobou



Obrázek č. 39 – Znázornění působících tlaků

Rovnice pro deformace  $\Delta \bar{r}_2^{II}$  a  $\Delta r_2^{III}$  opět zjistíme za pomoci obecného Hookeova zákonu. Jenž je blíže popsán v teoretické části této práce.

$$\Delta \bar{r}_2^{II} = \frac{r_2}{E_2} \left( C_1 + \frac{C_2}{r_2^2} + \mu_2 p_2 \right) \quad (4.16)$$

$$\Delta r_2^{III} = \frac{r_2}{E_3} \left( C_1 + \frac{C_2}{r_2^2} + \mu_3 p_2 \right) \quad (4.17)$$

Opět však budeme počítat se čtyřmi integračními konstantami a to zvlášť pro  $\Delta \bar{r}_2^{II}$  a  $\Delta r_2^{III}$ , které si určíme za pomoci obrázku č. 39. Okrajové podmínky zvolené pro tento výpočet jsou: vnější tlak  $p_3$  roven 0 protože na vnější poloměr kovové svorky nepůsobí žádný tlak. Tlak  $p_1$  je roven zjištěné hodnotě z předchozího výpočtu a tlak  $p_0$  je rovněž roven 0.

Pro  $\Delta \bar{r}_2^{II}$

$$C_1 = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (4.18)$$

Protože nyní se nám při dosazení okrajových podmínek rovnice nijak neupraví, je to její konečný tvar. Ten stejný případ platí i pro konstantu  $C_2$



$$C_2 = \frac{(p_1 - p_2)r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (4.19)$$

Pro  $\Delta r_2^{III}$ :

$$C_1 = \frac{p_2 r_2^2 - p_3 r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \quad (4.20.1)$$

Jelikož nyní uvažujeme tlak působící na vnější poloměr kovové svorky za 0, pak se nám rovnice upraví na tento tvar:

$$C_1 = \frac{p_2 r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \quad (4.20.2)$$

Obdobně druhá integrační konstanta za stejného předpokladu nulového tlaku  $p_3$ :

$$C_2 = \frac{(p_2 - p_3)r_2^2 r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \quad (4.21.1)$$

po úpravě:

$$C_2 = \frac{p_2 r_2^2 r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}. \quad (4.21.2)$$

Nyní můžeme získané rovnice dosadit do rovnic pro deformaci poloměrů  $\Delta r_2^{II}$  a  $\Delta r_2^{III}$ .

Pro poloměr  $r_2$  druhé nádoby (pryžové objímky) vypadá upravená rovnice deformace takto:

$$\Delta \bar{r}_2^{II} = \frac{r_2}{E_2} \left( \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{\frac{(p_1 - p_2)r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}}{r_2^2} + \mu_2 p_2 \right). \quad (4.22)$$

Pro poloměr  $r_2$  třetí nádoby (kovové svorky), vypadá upravená rovnice deformace následovně:

$$\Delta r_2^{III} = \frac{r_2}{E_3} \left( \frac{p_2 r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{\frac{p_2 r_2^2 r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}}{r_2^2} + \mu_3 p_2 \right). \quad (4.23)$$

Nyní pokud obě získané rovnice pro deformace vložíme do rovnice přesahu, získáme první rovnici soustavy dvou rovnic o dvou neznámých.

$$\Delta r_2 = |\Delta \bar{r}_2^{II}| + \Delta r_2^{III} \quad (4.24)$$

$$\Delta r_2 = \left| \frac{r_2}{E_2} \left( \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{\frac{(p_1 - p_2)r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}}{r_2^2} + \mu_2 p_2 \right) \right| + \frac{r_2}{E_3} \left( \frac{p_2 r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{\frac{p_2 r_2^2 r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}}{r_2^2} + \mu_3 p_2 \right) \quad (4.25)$$

Za druhou rovnici do soustavy dosadíme z teorie upravenou rovnici pro výpočet přesahu pro dva různé materiály.

$$\Delta r_2 = p_2 r_2 \left[ \frac{1}{E_2} \frac{r_2^2(1 - \mu_2) + r_1^2(1 + \mu_2)}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{1}{E_3} \frac{r_3^2(1 - \mu_3) + r_2^2(1 + \mu_3)}{r_3^2 - r_2^2} \right] \quad (4.26)$$

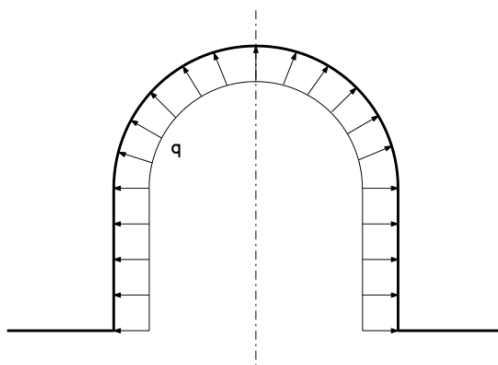
Vyřešením této soustavy pak získáme poloměr  $r_2$ , ale co je důležitější, získáme hledané předpětí  $p_2$ , které budeme využívat při následném zpřesnění tohoto analytického řešení.

## 4.2. Zpřesnění za pomoci teorie křivých prutů

Protože při zjednodušení zadaného reálného problému na tlustostěnné nádoby, by při výpočtu došlo k příliš velké chybě, a zadáním je zjistit deformace na kovové svorce stabilizátoru, zpřesníme výpočet „převedením“ kovové svorky z válcové nádoby, jak byla popsána v předešlém zjednodušení, na křivý prut, který bude již více tvarově odpovídat reálnému problému, a proto budeme schopni získat přesnější výsledky. Zpočátku budeme uvažovat svorku, jako tenký křivý prut, proto poměr poloměru střednice prutu ku jeho výšce uvažujeme větší nebo roven 5.

$$\frac{r}{h} \geq 5$$

Na následujícím obrázku č. 40 je vyobrazené tvarové zjednodušení. Už nyní si můžeme povšimnout razantní změny tvaru, oproti té, kterou jsme uvažovali v předešlém analytickém výpočtu.



Obrázek č. 40 – Znázornění zjednodušení kovové svorky na křivý prut a vyobrazení spojitého zatížení, jenž na něj působí.

### 4.2.1. Získání spojitého zatížení

Z analytického řešení tlustostěnných nádob, jsme získali tlak  $p_2$ , který působí na vnitřní stranu kovové svorky stabilizátoru. Abychom však byli schopni tento tlak použít při řešení zjednodušením na tenký křivý prut, musíme z tohoto tlaku získat lineární spojitě zatížení, čehož dosáhneme prostou úpravou za využití rovnice pro výpočet tlakové síly.

$$p = \frac{F}{S} \quad (4.27.1)$$

Vynásobíme-li tedy tuto rovnici plochou na kterou působí tlaková síla, získáme onu tlakovou sílu

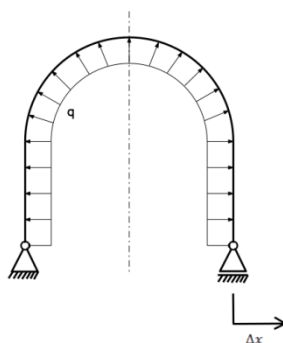
$$F = p \cdot S. \quad (4.27.2)$$

Lineární spojité zatížení posléze získáme tak, že tlakovou sílu vydělíme délkou křivky, na které by mělo spojité zatížení působit.

$$q = \frac{F}{l_k} = \frac{p \cdot S}{l_k} \quad (4.28)$$

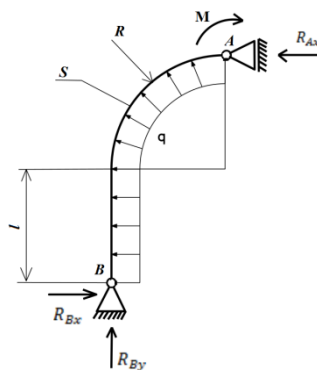
#### 4.2.2. Ukotvení křivého prutu vazbami

Aby bylo možné křivý prut vůbec řešit, musíme ho určitým způsobem ukotvit vazbami. Ploché „packy“ jenž na reálné součásti slouží k ukotvení svorky k podvozku za pomoci šroubů, nahradíme kloubovými vazbami. Přičemž jedna kloubová vazba bude umožňovat posuv o ose  $x$  tedy  $\Delta x$ . Tak jak je znázorněno na následujícím obrázku.



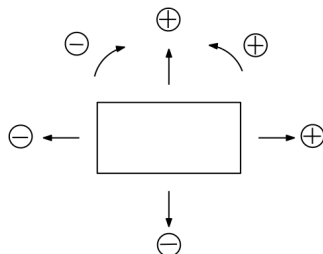
Obrázek č. 41 – Znázornění vazeb

Jelikož je zjednodušený křivý prut osově symetrický, můžeme toho využít k dalšímu zjednodušení. Prut rozdělíme v místě osy na poloviny a nahradíme druhou polovinu vazbou a silovým momentem, což je znázorněno na obrázku č 42.



Obrázek č.42 – Reakce a rozměry křivého prutu

Z obrázku můžeme vyčíst, že i nyní máme dvě vazby, a to vazbu A a B. Ve vazbě B budou působit dvě reakce v ose x a y souřadného systému. Ve vazbě A pak reakce ve směru osy x a moment M. Prut je dále dán poloměrem  $R$ , délkou rovného úseku  $l$  a průřezem  $S$ . Obdobně jako u řešení pomocí teorie tlustostěnných nádob, má křivý prut modul pružnosti v tahu  $E_3$ . Pokud se budeme držet znaménkové dohody, která je vyobrazena na obrázku č. 43, můžeme sestavit 3 rovnovážné rovnice.



Obrázek č.43 – Znaménková dohoda

#### 4.2.3. Sestavení rovnic rovnováhy

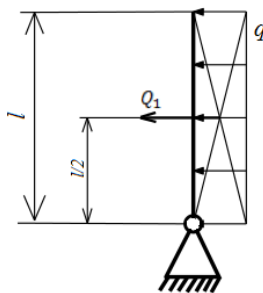
Pro sestavení rovnic rovnováhy, se součet všech momentů, které působí na vazbu B a sil v osách x a y musí rovnat 0. Vazba B byla zvolena proto, že jí prochází dvě naše neznáme reakce  $R_{Bx}$  a  $R_{By}$ , jenž se vyruší a vypsání momentové rovnice rovnováhy bude jednodušší.

$$\sum F_{ix} = 0 \quad (4.29.1)$$

$$\sum F_{iy} = 0 \quad (4.30.1)$$

$$\sum M_{iB} = 0 \quad (4.31.1)$$

Než však budeme do rovnic dosazovat, musíme si určit síly, jimiž bude na prut působit spojité zatížení. Můžeme si prut rozložit na dvě části. Rovnou o délce  $l$  a čtvrt-kružnicovou s poloměrem  $R$ . Pro rovnou část prutu nám k popsání směru působení síly od spojitěho zatížení i jejího ramene při momentovém působení na vazbu B postačí jeden obrázek č.44.

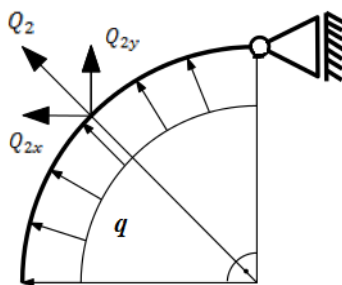


Obrázek č. 44 – Síla od spojitěho zatížení na rovné části prutu

Víme tedy, že spojitě zatížení na rovné části prutu vyvodí sílu  $Q_1$  na rameni  $\frac{l}{2}$  vůči vazbě  $B$  a její velikost můžeme získat následovně:

$$Q_1 = q \cdot l. \quad (4.32)$$

Pro popsání spojitěho zatížení působícího na čtvrt-kružnicové části křivého prutu, budeme potřebovat kvůli přehlednosti obrázky dva a to č. 45 a 46. Kde u obrázku č. 46 budou znázorněna ramena na kterých síla momentově působí vůči vazbě  $B$ .



Obrázek č.45 – Znázornění působení síly od spojitěho zatížení na křivé části prutu

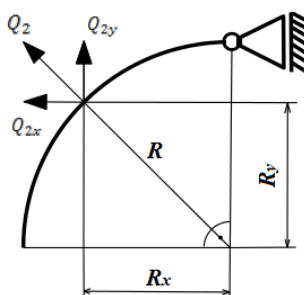
Protože síla  $Q_2$  od spojitěho zatížení působí z těžiště zatěžovací plochy, a jelikož se jedná o čtvrtinu kružnice, pak tuto sílu můžeme posunout do bodu působení na křivém prutu. A její velikost můžeme určit takto:

$$Q_2 = q \cdot l_2, \quad (4.33)$$

kde

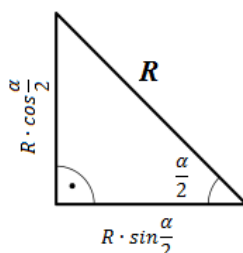
$$l_2 = \frac{\pi \cdot R \cdot \alpha}{180^\circ}. \quad (4.34)$$

což je délka oblouku na který spojitě zatížení působí. Sílu  $Q_2$  poté musíme rozdělit na složky ve směru osy  $x$  a  $y$ . Což však je jednoduché využití goniometrických funkcí.



Obrázek č. 46 – Odvození ramen pro momenty od spojitěho zatížení

Pro snadnější odvození rozměrů poloměrů  $R_x$  a  $R_y$ , si tento problém zjednodušíme na pravoúhlý trojúhelník, zobrazený na následujícím obrázku. Pravý úhel zobrazený na předchozím obrázku č. 47 označíme jako úhel  $\alpha$ .



Obrázek č. 47 – Znázornění velikostí ramen na pravoúhlém trojúhelníku

Po odvození všech ramen a vypsání sil, vypadají rovnice rovnováhy takto:

$$\sum F_{ix} = R_{Bx} - R_{Ax} - Q_1 - Q_{2x} \quad (4.29.2)$$

$$\sum F_{iy} = R_{By} + Q_{2y} \quad (4.30.2)$$

$$\sum M_{iB} = -R_{Ax} \cdot (R + l) + M - Q_1 \cdot \frac{l}{2} - Q_{2x} \cdot \left( \left( R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right) + l \right) - Q_{2y} \cdot R \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right). \quad (4.31.2)$$

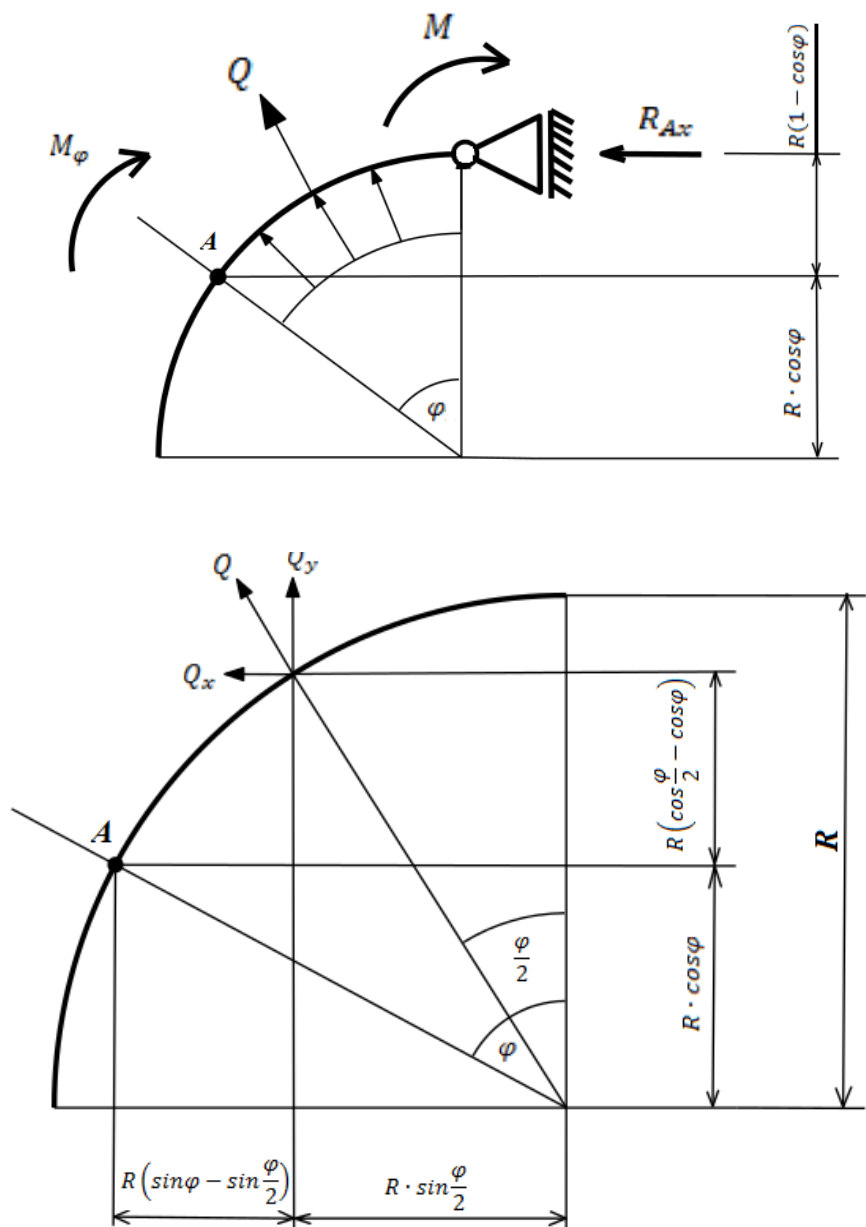
Při bližším pohledu na rovnovážné rovnice zjistíme, že máme čtyři neznámé, a to  $R_{Ax}$ ,  $R_{Bx}$ ,  $R_{By}$ , a  $M$ , ale pouze tři rovnovážné rovnice. Úloha je tedy jedenkrát staticky neurčitá a musíme získat čtvrtou rovnici, pomocí které budeme schopni všechny neznámé získat.

#### 4.2.4. Castiglianova věta

K vyřešení statické neurčitosti prutu, si pomůžeme Castiglianovou větou. Víme totiž, že natočení od momentu vzniklé po symetrickém rozdělení svorky, musí být rovno 0. Proto metodami řezu získáme výslednou momentovou rovnici, kterou aplikujeme v Castiglianově větě.

$$\varphi_M = 0^\circ$$

První řez aplikujeme na křivé části prutu. K správnému odvození momentové rovnice nám poslouží dva obrázky. Na prvním (obrázek č.48) si nastíníme na jakých ramenech působí síly k bodu A, kudy vedeme řez, na druhém (obrázek č. 49) potom odvodíme jakým způsobem bude zatěžovat vyříznutou část prutu spojitě zatížení.



Úhel řezu  $\varphi$ , se pohybuje v intervalu  $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ .

Obrázek č. 48 – Řez křivé části prutu

Obrázek č. 49 – Zobrazení působení spojitého zatížení na vyříznuté části

Protože však síla od spojitého zatížení je závislá na délce křivky  $l_r$ , na kterou působí, musíme ji předepsat jako délku vyříznutého oblouku. Síla  $Q$  v řezu bude mít tedy tento tvar

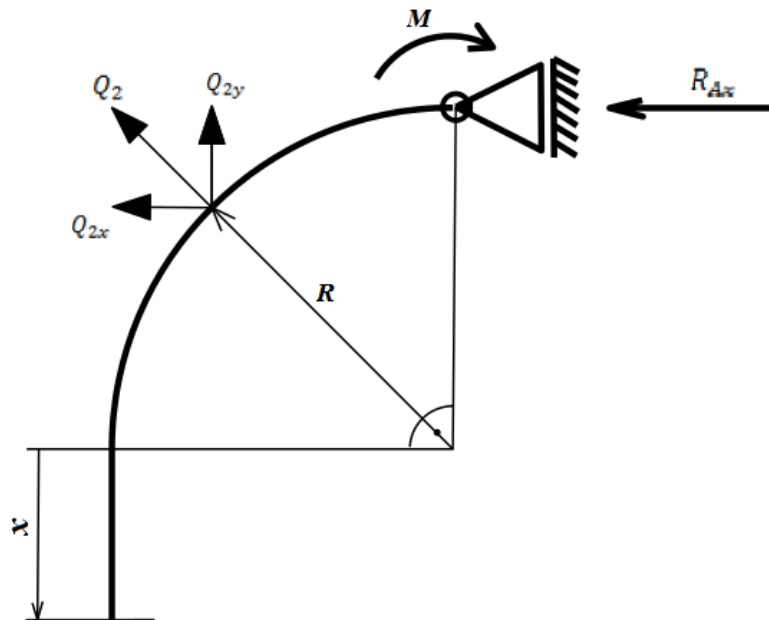
$$Q = q \cdot l_r \quad (4.35)$$

$$l_r = \frac{\pi \cdot R \cdot \varphi}{180^\circ} \quad (4.36)$$

Výslednou momentovou rovnicí pro řez na křivé části prutu můžeme tedy zapsat takto:

$$M_\varphi = -R_{Ax} \cdot R(1 - \cos\varphi) - Q_x \cdot R \left( \cos\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi \right) - Q_y \cdot R \left( \sin\varphi - \sin\frac{\varphi}{2} \right) + M. \quad (4.37)$$

Pro sepsání momentové rovnice v řezu na rovné části křivého prutu nám postačí pouze jeden obrázek, protože u popisu působení spojitého zatížení můžeme čerpat z obrázku č. 50.



Obrázek č. 50 – Naznačení řezu na rovné části křivého prutu

Vzdálenost řezu  $x$  se pohybuje v intervalu  $\{0; l\}$ . A pravý úhel naznačený na obrázku č. 50 budeme v dalším postupu označovat jako úhel  $\alpha$ . Ramena, na kterých působí momentově rozložená síla  $Q_2$  jsou již vyobrazené na obrázcích č. 46 a 47. Síla  $Q_1$  od spojitého zatížení na rovné části křivého prutu, je pak rovna  $Q_1 = q \cdot x$ , a působí na rameni  $\frac{x}{2}$ . Vypsání momentová rovnice pro tento řez pak vypadá následovně.

$$M_x = -R_{Ax}(R + x) - \frac{q \cdot x^2}{2} - Q_{2y} \cdot R \left( 1 - \cos\frac{\alpha}{2} \right) - Q_{2x} \left( R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + x \right) + M \quad (4.38)$$

Pro úplné vypsání Castiglianovy věty nyní potřebujeme parciální derivace obou vypsanych momentových rovnic podle momentu  $M$ .



$$\frac{\delta M_\varphi}{\delta M} = 1 \quad (4.39)$$

$$\frac{\delta M_x}{\delta M} = 1 \quad (4.40)$$

Dosazením do Castiglianovy věty pak získáme čtvrtou rovnici, potřebnou k vyřešení statické neurčitosti. Pokud bereme změnu úhlu  $\varphi$  jako velmi malou, můžeme  $ds$  v integrálu přepsat pro zakřivenou část křivého prutu na  $Rd\varphi$ .

$$\varphi_M = \frac{1}{EJ} \int_{(l)} M_{(\varphi,x)} \frac{\delta M_{(\varphi,x)}}{\delta M} ds \quad (4.41.1)$$

$$\varphi_M = \frac{1}{EJ} \left[ \int_{(l)} M_\varphi \frac{\delta M_\varphi}{\delta M} ds + \int_{(l)} M_x \frac{\delta M_x}{\delta M} ds \right] \quad (4.41.2)$$

$$\varphi_M = \frac{1}{EJ} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi \frac{\delta M_\varphi}{\delta M} R d\varphi + \int_0^l M_x \frac{\delta M_x}{\delta M} dx \right] \quad (4.41.3)$$

$$\varphi_M = \frac{1}{EJ} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( -R_{Ax} \cdot R(1 - \cos\varphi) - Q_x \cdot R \left( \cos\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi \right) - Q_y \cdot R \left( \sin\varphi - \sin\frac{\varphi}{2} \right) + M \right) R d\varphi \right. \\ \left. + \int_0^l \left( -R_{Ax}(R+x) - \frac{q \cdot x^2}{2} - Q_{2y} \cdot R \left( 1 - \cos\frac{\alpha}{2} \right) - Q_{2x} \left( R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + x \right) + M \right) dx \right] \quad (4.41.4)$$

Po vyřešení soustavy čtyř rovnic o čtyřech neznámých, získáme silové reakce ve vazbách i moment, který vznikne zjednodušením podle symetrie, na kovové svorce stabilizátoru vlivem spojitého zatížení od tlaku  $p_2$ , jenž byl získán teorií tlustostěnných nádob.

## 5 Aplikace analytického řešení na daném problému

Abychom mohli ověřit zjištěné analytické řešení, aplikujeme jej na reálných součástech. Přičemž i u nich dojde k určitému zjednodušení a musíme tedy ve výsledku počítat s určitou chybou. Postup výpočtu a zjištění rozměrů do něj vstupujících bude podrobněji popsán pouze na svorce stabilizátoru OEM1. Výsledky pro svorky stabilizátoru OEM2 a OEM3 už budou pouze vypsány.

### 5.1. Aplikace na svorce stabilizátoru OEM1

#### 5.1.1. Zjištění rozměrů vstupujících do výpočtu $p_1$ a následný výpočet

Potřebné rozměry součástí byly dodány na výkresové dokumentaci od firmy Mubea. Nejprve jsme si museli určit přesah rozměrů mezi stabilizátorem a pryžovou svorkou. V následující tabulce budou tedy popsány počáteční rozměry a materiálové konstanty obou součástí potřebné u výpočtu.

	<b>Stabilizátor</b>	<b>Pryžová objímka</b>
Modul pružnosti v tahu	$E_1 = 210 \text{ GPa}$	$E_2 = 13,6 \text{ MPa}$
Vnitřní poloměr	$r_0 = 7,55 \text{ mm}$	$r_1^{II} = 9,25 \text{ mm}$
Vnější poloměr	$r_1^I = 11,25 \text{ mm}$	$r_2 = 21,5 \text{ mm}$
Poissonova konstanta	$\mu_1 = 0,3$	$\mu_2 = 0,499$

Tabulka č. 1 – Hodnoty vstupující do výpočtu  $p_1$

Ze zadaných rozměrů vnějšího poloměru stabilizátoru  $r_1^I$  a vnitřního poloměru pryžové objímky  $r_1^{II}$  jsme poté určili přesah  $\Delta r_1 = 2 \text{ mm}$ . Po dosazení těchto hodnot do rovnic č. (4.11) a (4.12) získáme hledanou soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$2 = \left| \frac{r_1}{210000} \left( -\frac{p_1 r_1^2}{r_1^2 - 7,55^2} + \frac{-7,55^2 p_1}{r_1^2 - 7,55^2} + 0,3 p_1 \right) \right| + \frac{r_1}{13,6} \left( \frac{p_1 r_1^2}{21,5^2 - r_1^2} + \frac{21,5^2 p_1}{r_2^2 - r_1^2} + 0,499 p_1 \right). \quad (5.1)$$

$$2 = p_1 r_1 \left[ \frac{1}{210000} \frac{r_1^2 (1 - 0,3) + 7,55^2 (1 + 0,3)}{r_1^2 - 7,55^2} + \frac{1}{13,6} \frac{21,5^2 (1 - 0,499) + r_1^2 (1 + 0,499)}{21,5^2 - r_1^2} \right]. \quad (5.2)$$

Protože jsou tyto rovnice velmi složité, trval by jejich ruční výpočet velice dlouho, rozhodli jsme se proto využít program MATLAB. A v něm za pomoci již zjištěné Newtonovy metody získat neznámý poloměr  $r_1$  a tlak  $p_1$ .

Získané hodnoty:

$$r_1 = 11,18 \text{ mm}$$

$$p_1 = 1,26 \text{ MPa}$$

Zjistili jsme tedy že na dosedových plochách mezi stabilizátorem a pryžovou objímkou působí předpětí 1,26 MPa.

### 5.1.2. Zjištění rozměrů vstupujících do výpočtu $p_2$ a následný výpočet

Jelikož předpětí  $p_2$  zjišťujeme na plochách mezi již zdeformovanou pryžovou objímkou a kovovou svorkou, musíme si nejprve určit ony zdeformované rozměry pryže. Za vnitřní poloměr pryže budeme považovat poloměr  $r_1$  určený v předešlém výpočtu. Vnější poloměr vypočteme jako součet nezdeformovaného poloměru a deformace tohoto poloměru vlivem předpětí  $p_1$ . Vztahy pro tento výpočet jsou vypsány v kapitole 4 (rovnice č. (4.13) a (4.14)). Dosadíme-li tedy do těchto rovnic potřebné hodnoty, získáme onen vnější poloměr pryžové objímky.

$$\Delta \bar{r}_2^{II} = \frac{21,5}{13,6} \left( \frac{1,26 \cdot 11,18^2}{21,5^2 - 11,18^2} + \frac{1,26 \cdot 11,18^2}{21,5^2 - 11,18^2} \right) = 1,476 \text{ mm} \quad (5.3)$$

$$\bar{r}_2^{II} = \bar{r}_2 + \Delta \bar{r}_2^{II} = 21,5 + 1,476 = 22,976 \quad (5.4)$$

Rozměry kovové svorky byly zjištěny z výkresové dokumentace zaslané. Materiálové konstanty a rozměry obou součástí jsou shrnuty v tabulce č. 2. Do výpočtu ještě musíme zahrnout tlak  $p_1 = 1,26 \text{ MPa}$  zjištěný v předchozím výpočtu.

	<b>Pryžová objímka</b>	<b>Kovová svorka</b>
Modul pružnosti v tahu	$E_2 = 13,6 \text{ MPa}$	$E_3 = 71 \text{ GPa}$
Vnitřní poloměr	$r_1 = 11,18 \text{ mm}$	$r_2^{III} = 22 \text{ mm}$
Vnější poloměr	$\bar{r}_2^{II} = 22,976 \text{ mm}$	$r_3 = 25 \text{ mm}$
Poissonova konstanta	$\mu_1 = 0,499$	$\mu_2 = 0,334$

Tabulka č. 2 – Hodnoty vstupující do výpočtu  $p_2$

Z rozdílu hodnot vnějšího poloměru pryžové objímky a vnitřního poloměru kovové svorky, získáme hodnotu přesahu  $\Delta r_2 = 0,976 \text{ mm}$ . Dosadíme-li nyní všechny potřebné hodnoty do rovnic č. (4.25) a (4.26) a vypočteme vzniklou soustavu rovnic, získáme hledané předpětí na stykových plochách pryžové objímky a kovové svorky stabilizátoru  $p_2$ .

$$0,976 = \left| \frac{r_2}{13,6} \left( \frac{1,26 \cdot 11,18^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - 11,18^2} + \frac{(1,26 - p_2) 11,18^2 r_2^2}{r_2^2 - 11,18^2} + 0,499 p_2 \right) \right| + \frac{r_2}{71000} \left( \frac{p_2 r_2^2}{25^2 - r_2^2} + \frac{25^2 p_2}{25^2 - r_2^2} + 0,334 p_2 \right) \quad (5.5)$$

$$0,976 = p_2 r_2 \left[ \frac{1}{13,6} \frac{r_2^2 (1 - 0,499) + 11,18^2 (1 + 0,499)}{r_2^2 - 11,18^2} + \frac{1}{71000} \frac{25^2 (1 - 0,334) + r_2^2 (1 + 0,334)}{25^2 - r_2^2} \right] \quad (5.6)$$

Tuto soustavu rovnic jsme dále rovněž jako u předchozího výpočtu  $p_1$  zapsali a vyřešili v programu MATLAB a získali tak hodnotu předpětí  $p_2 = 0,4369 \text{ Ml}$ .

### 5.1.3. Přepočet tlaku na spojitě zatížení

Abychom mohli zjištěný tlak (předpětí)  $p_2$  použít jako spojitě zatížení pro výpočet za pomoci křivého prutu, musíme jej určitým způsobem upravit. Tato úprava byla popsána v kapitole 4 a nyní jen vložíme dané hodnoty do získaných vzorců č. (4.27) a (4.28). Přičemž délka křivky na a obsah plochy, na kterou tlak působí byly vypočteny z rozměrů ve výkresové dokumentaci. A všechny potřebné hodnoty jsou vypsány v následující tabulce. Za poloměr zakřivené části prutu bude dosazena hodnota  $R = 23 \text{ mm}$ , délka rovné části je pak  $l = 22,5 \text{ mm}$ . Šířka plochy, na kterou tlak působí je  $b = 26 \text{ mm}$ .

$$F = p \cdot S = p \cdot l_k \cdot b = 0,4369 \cdot (\pi \cdot R + 2l) \cdot b = 0,4369 \cdot (\pi \cdot 23 + 45) \cdot 26 \quad (5.7)$$

$$F = 1331,965 \text{ N}$$

$$q = \frac{F}{l_k} = \frac{1331,965}{117,257} = 11.359 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad (5.8)$$

### 5.1.4. Výpočet silových reakcí a momentu

Abychom byli schopni náležitě popsat deformace vzniklé na součásti od tlaku  $p_2$ . Musíme určit silové reakce, které tento tlak vyvolá. Jejich odvození bylo popsáno v kapitole 4. V této kapitole budou tyto rovnice dále upraveny a získány z nich hodnoty silových reakcí a silového momentu za využití programu MATLAB. Síly od spojitěho zatížení musí být tedy přepsány na následující tvary:

$$Q_1 = q \cdot l = 11,359 \cdot 22,5 = 255,578 \text{ N}, \quad (5.9)$$

$$Q_2 = q \cdot l_2 = q \cdot \frac{\pi \cdot R \cdot \alpha}{180^\circ} = 11,359 \cdot \frac{\pi \cdot 23 \cdot 90^\circ}{180^\circ} = 410,381 \text{ N}. \quad (5.10)$$

Jelikož však potřebujeme i sílu  $Q_2$  přepočtenou dle směrů os x,y určíme si i tyto hodnoty:

$$Q_{2x} = Q_2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = 290,184 \text{ N}, \quad (5.11)$$

$$Q_{2y} = Q_2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 290,184 \text{ N}. \quad (5.12)$$

Tyto získané hodnoty jsme vložili do rovnic rovnováhy č. (4.29.2), (4.30.2) a (4.31.2) a následně upravili čímž jsme získali tyto tvary:

$$R_{Bx} - R_{Ax} = Q_1 + Q_{2x} \quad (5.13.1)$$

$$R_{By} = -Q_{2y} \quad (5.14.1)$$

$$-R_{Ax} \cdot (R + l) + M = Q_1 \cdot \frac{l}{2} + Q_{2x} \cdot \left( \left( R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right) + l \right) + Q_{2y} \cdot R \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) \quad (5.15.1)$$

Protože však z těchto rovnic nejsme schopni určit všechny neznámé, museli jsme využít Castiglianovy věty o natočení. Tento postup je opět popsán v kapitole 4 (rovnice č. 4.41.4). Tuto rovnici jsme pak museli kvůli přehlednosti rozdělit na dvě menší. Které jsou vypsány níže.

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( -R_{Ax} \cdot R(1 - \cos \varphi) - Q_x \cdot R \left( \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \varphi \right) - Q_y \cdot R \left( \sin \varphi - \sin \frac{\varphi}{2} \right) + M \right) R d\varphi \\ & + \int_0^l \left( -R_{Ax}(R + x) - \frac{q \cdot x^2}{2} - Q_{2y} \cdot R \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) - Q_{2x} \left( R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + x \right) + M \right) dx \end{aligned} \quad (5.16.1)$$

**První rovnice:**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( -R_{Ax} \cdot R(1 - \cos\varphi) - Q_x \cdot R \left( \cos \frac{\varphi}{2} - \cos\varphi \right) - Q_y \cdot R \left( \sin\varphi - \sin \frac{\varphi}{2} \right) + M \right) R d\varphi \quad (5.17.1)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-R_{Ax} \cdot R(1 - \cos\varphi)) R d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_x \cdot R \left( \cos \frac{\varphi}{2} - \cos\varphi \right) R d\varphi \\ & - \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_y \cdot R \left( \sin\varphi - \sin \frac{\varphi}{2} \right) R d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} M R d\varphi. \end{aligned} \quad (5.17.2)$$

Po dosazení rovnic pro síly od spojitého zatížení v řezu  $Q_x$  a  $Q_y$  a následném integrování rovnice (5.17.2) jsme získali tento tvar:

$$\begin{aligned} & -R_{Ax} \cdot R^2 \left[ \varphi - \sin \frac{\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + M \cdot R \cdot [\varphi]_0^{\pi/2} \\ & - q \cdot \frac{\pi \cdot R^3}{180^\circ} \left[ -\frac{\varphi \sin(\frac{\varphi}{2})}{4} - \frac{\cos(2\varphi)}{8} + \frac{\varphi \sin(\frac{3\varphi}{2})}{3} + \frac{2\cos(\frac{3\varphi}{2})}{9} + \varphi \sin(\frac{\varphi}{2}) + 2\cos(\frac{\varphi}{2}) - \frac{\varphi^2}{4} \right]_0^{\pi/2} \\ & - q \cdot \frac{\pi \cdot R^3}{180^\circ} \left[ -\frac{\varphi \sin(2\varphi)}{4} - \frac{\cos(2\varphi)}{8} + \frac{\varphi \sin(\frac{3\varphi}{2})}{3} + \frac{2\cos(\frac{3\varphi}{2})}{9} - \varphi \sin(\frac{\varphi}{2}) - 2\cos(\frac{\varphi}{2}) - \frac{\varphi^2}{4} \right]_0^{\pi/2} \end{aligned} \quad (5.17.3)$$

**Druhá rovnice:**

$$\int_0^l \left( -R_{Ax}(R + x) - \frac{q \cdot x^2}{2} - Q_{2y} \cdot R \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) - Q_{2x} \left( R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + x \right) + M \right) dx \quad (5.18.1)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^l (-R_{Ax}(R + x)) dx - \int_0^l \frac{q \cdot x^2}{2} dx - \int_0^l Q_{2y} \cdot R \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) dx \\ & - \int_0^l Q_{2x} \cdot \left( R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + x \right) dx + \int_0^l M dx \end{aligned} \quad (5.18.2)$$

Jelikož jsme v této rovnici integrovali podle  $x$ , pak síly od spojitého zatížení  $Q_{2x}$ ,  $Q_{2y}$  mohou být zapsány jako konstanty. Výsledná upravená rovnice vypadá takto:

$$-R_{Ax} \left[ R \cdot x + \frac{x^2}{2} \right]_0^l - q \cdot \left[ \frac{x^3}{6} \right]_0^l - Q_{2y} \cdot R \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) \cdot [x]_0^l - Q_{2x} \left[ R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot x + \frac{x^2}{2} \right]_0^l + M \cdot [x]_0^l \quad (5.18.3)$$

Dosazením obou takto získaných rovnic č. (5.17.3) a (5.18.3) do rovnice č. (5.16.1) a následnou úpravou jsme získali poslední rovnici potřebnou k výpočtu reakcí.

$$\begin{aligned}
& -R_{Ax} \cdot R^2 \left[ \varphi - \sin \frac{\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - R_{Ax} \left[ R \cdot x + \frac{x^2}{2} \right]_0^l + M \cdot [x]_0^l + M \cdot R \cdot [\varphi]_0^{\pi/2} = \\
& q \cdot \left[ \frac{x^3}{6} \right]_0^l + Q_{2y} \cdot R \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) \cdot [x]_0^l + Q_{2x} \left[ R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot x + \frac{x^2}{2} \right]_0^l + \\
& q \cdot \frac{\pi \cdot R^3}{180^\circ} \left[ -\frac{\varphi \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right)}{4} - \frac{\cos(2\varphi)}{8} + \frac{\varphi \sin \left( \frac{3\varphi}{2} \right)}{3} + \frac{2 \cos \left( \frac{3\varphi}{2} \right)}{9} + \varphi \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right) + 2 \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{\varphi^2}{4} \right]_0^{\pi/2} \quad (5.16.2) \\
& + q \cdot \frac{\pi \cdot R^3}{180^\circ} \left[ -\frac{\varphi \sin(2\varphi)}{4} - \frac{\cos(2\varphi)}{8} + \frac{\varphi \sin \left( \frac{3\varphi}{2} \right)}{3} + \frac{2 \cos \left( \frac{3\varphi}{2} \right)}{9} - \varphi \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right) - 2 \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{\varphi^2}{4} \right]_0^{\pi/2}
\end{aligned}$$

Do rovnic č. (5.13.1), (5.14.1), (5.15.1) a (5.16.2) jsme následně dosadili rozměry a to  $R = 23mm$ ,  $l = 22,5 m$ ,  $q = 11,359 \frac{N}{mm}$  a  $\alpha = 90^\circ$ . A vše zapsali do programu MATLAB a získali hodnoty silových reakcí a silového momentu.

$$R_{Ax} = -548,796 N$$

$$R_{Bx} = -3,0345 N$$

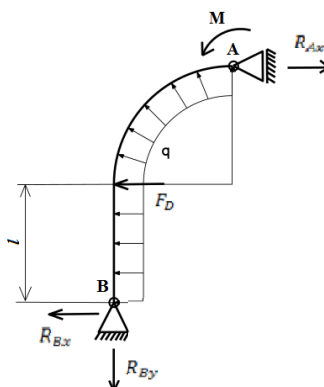
$$R_{By} = 290,184 N$$

$$M = -8891,586 N \cdot mm$$

Protože reakce a moment  $M$  vyšly záporné, víme, že jejich orientace je opačná, než jaká byla uvedena v počátku řešení. Tento fakt však nijak významně neovlivňuje řešení. Pro další postup jsme jejich orientaci obrátili a počítali s kladnými hodnotami.

### 5.1.5 Výpočet deformací

Jak již bylo zmíněno v kapitole č. 4, tak k výpočtu deformací na křivém prutu jsme využili Castiglianovy věty. Protože však na prut působí jen spojitě zatížení a žádná volná síla, museli jsme zavést do místa, ve kterém jsme chtěli deformaci získat doplňkovou sílu  $F_D = 0 N$ .



Obrázek č. 51 – Naznačení zavedení síly  $F_D$  a změny směru působení reakcí a momentu

Nyní jsme opět provedli dva řezy, a to ve stejných místech jako u sestavování rovnice pro vyřešení statické určitosti, s tím rozdílem, že nyní jsme přihlíželi ke změně orientace reakcí a

momentu a přidali jsme do momentových rovnic případnou sílu  $F_D$ . Jelikož jsme však na počátku zjednodušili křivý prut za pomoci symetrie, musíme nyní v Castiglianově rovnici pro průhyb násobit dvěma. A ony momentové rovnice získané řezy parciálně derivovat podle síly  $F_D$ .

$$w = \frac{2}{EJ} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi \frac{\delta M_\varphi}{\delta F_D} R d\varphi + \int_0^l M_x \frac{\delta M_x}{\delta F_D} dx \right] \quad (5.19.1)$$

První řez jsme vedli v intervalu  $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$  a parciální derivace této momentové rovnice podle síly  $F_D$  je rovna 0, proto jsme se zaměřili pouze na druhou momentovou rovnici, která vypadá takto:

$$M_x = R_{Ax}(R+x) - \frac{q \cdot x^2}{2} - Q_{2y}R \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) - Q_{2x} \left(R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + x\right) - M - F_D \cdot x \quad (5.20)$$

Parciální derivace této momentové rovnice podle síly  $F_D$  má hodnotu:

$$\frac{\delta M_x}{\delta F_D} = -x \quad (5.21)$$

A roznásobením momentové rovnice  $M_x$  onou parciální derivací, jsme získali rovnici, kterou jsme následně integrovali. Za meze integrálu byly dosazeny hodnoty intervalu druhé řezu a to  $\langle 0; l \rangle$ .

$$\int_0^l \left( -R_{Ax}(R+x)x + \frac{q \cdot x^3}{2} + Q_{2y}R \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)x + Q_{2x} \left(R \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + x\right)x + Mx + F_D \cdot x^2 \right) dx \quad (5.22.1)$$

$$-R_{Ax} \left[ \frac{Rx^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^l + q \cdot \left[ \frac{x^4}{8} \right]_0^l + Q_{2y}R \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^l + Q_{2x} \left[ \frac{Rx^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^l + M \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^l + F_D \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^l \quad (5.22.2)$$

Protože je síla  $F_D = 0$  N mohli jsme ji u výpočtu odstranit.

Před samotným výpočtem musel být zjištěn moment setrvačnosti průřezu  $J$ , proto jsme dle zadané výkresové dokumentace překreslili průřez do programu Autodesk Inventor Professional 2015 a nechali v něm spočítat hledaný moment, jehož hodnota byla zjištěna na  $J = 284,408 \text{ mm}^4$ .

Nyní jsme do takto připravené rovnice dosadili číselné hodnoty rozměrů:  $R = 23 \text{ mm}$ ,  $l = 22,5 \text{ mm}$ ,  $\alpha = 45^\circ$  a reakci:  $R_{Ax} = 548,796 \text{ N}$ ,  $Q_{2x/y} = 290,184 \text{ N}$ ,  $M = 8891,586 \text{ N} \cdot \text{mm}$ . A po vyčíslení získali hledanou deformaci v místě působení doplňkové síly  $F_D$ .

$$w = \frac{2}{EJ} \left[ \int_0^l M_x \frac{\delta M_x}{\delta F_D} dx \right] \quad (5.19.2)$$

$$w = \frac{2}{71000 \text{ Ml} \cdot 284,408 \text{ mm}^4} [127056,9 \text{ N} \cdot \text{mm}^3] \quad (5.19.3)$$

$$w = 0,0126 \text{ mm}$$



## 5.2. Výsledky řešení na svorkách OEM2 a OEM3

Protože v předchozí podkapitole jsme podrobně popsali postup výpočtu deformace kovové svorky OEM1, pro svorku OEM2 již takto podrobně řešení vypisovat nebudeme a pouze jej shrneme do následující tabulky jenž bude obsahovat hodnoty předpětí  $p_1$ , předpětí  $p_2$ , spojitě zatížení  $q$  a deformaci ve stejném místě jako u OEM1. Jelikož jsme pro svorku OEM3 nezískali experimentální zkouškou modul pružnosti v tahu  $E$  a dosazením jiného modulu pružnosti bychom nezískali ani zdánlivě přesné výsledky, rozhodli jsme se ji nepočítat a aplikovat řešení pouze na svorky OEM1 a OEM2.

	OEM1	OEM2
Předpětí (tlak) $p_1$	1,26 MPa	10,5699 MPa
Předpětí (tlak) $p_2$	0,4369 MPa	3,3011 MPa
Spojitě zatížení $q$	$11,359 \frac{N}{mm}$	$99.033 \frac{N}{mm}$
Deformace (průhyb) $w$	0,0126 mm	0,0204 mm

Tabulka č. 3 – Shrnutí zjištěných tlaků a deformací

## 6. Závěr

Zadáním této bakalářské práce bylo sestavit analytický výpočet deformace svorky stabilizátoru, který by mohl být využit k případnému vytvoření jednoduchého výpočetního programu.

Firma Mubea dodala veškerou výkresovou dokumentaci a 3D modely součástí, jediné co bylo potřeba zjistit byl modul pružnosti v tahu pryžové objímky stabilizátoru. V rámci zjišťování modulu pružnosti byla nejprve provedena zkouška na dvou ze tří dodaných modelů kovopryžových pouzder stabilizátorů, pro které byly vyrobeny speciální podpůrné součásti, díky kterým se daly svorky stabilizátorů využít ke stlačování pryžové objímky. Hodnoty získané touto zkouškou se pak zpracovali do grafu a byly dále aplikovány v analýze za pomoci metody konečných prvků. Postupnou úpravou modulu pružnosti v tahu v MKP výpočtech tak, aby odpovídala závislost deformace na síle, která byla zjištěna při experimentální zkoušce, se získala přibližná hodnota modulu pružnosti.

První částí analytického řešení bylo zjednodušení reálného problému za pomoci teorie tlustostěnných nádob. V této části výpočtu jsme z rozměrových přesahů mezi stabilizátorem/pryžovou objímkou a pryžovou objímkou/kovovou svorkou získali sestavením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých předpětí, která působí na stykových plochách těchto součástí.

V druhé části jsme pak využili teorii křivých prutů ke zpřesnění, protože křivé pruty nám dovolí lépe vystihnout tvar reálné součásti. Byla zavedena symetrie a z předpětí na stykové ploše pryž/svorka jsme určili spojitě zatížení působící na zjednodušený křivý prut. Dalším postupem bylo vyřešení statické neurčitosti křivého prutu za pomoci Castiglianovy věty, přičemž jsme uvažovali natočení v jedné z vazeb (ukotvení) prutu rovno nule. A následně po získání silových reakcí ve vazbách a momentu byla aplikována Castiglianova věta pro zjištění průhybu.

Ze získaných hodnot můžeme říci, že u kovopryžového pouzdra stabilizátoru OEM1 je menší modul pružnosti v tahu kovové svorky vynahrazován menší hodnotou modulu pružnosti v tahu pryžové objímky. U pouzdra OEM2 je tomu přesně naopak, jelikož je kovová svorka z pevnějšího materiálu, je i pryžová objímka pevnější. Ve výsledném porovnání vychází deformace přibližně stejné, ačkoliv spojitě zatížení a předpětí působící na svorku OEM2 je větší než u OEM, což je dáno oním rozdílem materiálů.

## Seznam použité literatury

- [1] HÖSCHL, Cyril. Pružnost a pevnost ve strojnictví: učebnice pro vysoké školy. Praha: SNTL, 1971. Řada teoretické literatury.
- [2] KUBA, František. Teorie pružnosti a vybrané aplikace: příručka pro vys. školy techn. směru. 2., nezm. vyd. Praha: SNTL, 1982.
- [3] MAREŠ, DOC. ING . PHD, Tomáš. *Křivé pruty* [online]. In: . [cit. 2017-05-10]. Dostupné z: [http://drone.fsid.cvut.cz/pp2/Krive\\_pruty.pdf](http://drone.fsid.cvut.cz/pp2/Krive_pruty.pdf)
- [4] Obrázek stabilizátoru. In: *Autoprofiteam* [online]. 2010 [cit. 2017-05-10]. Dostupné z: <http://www.autoprofiteam.cz/podvozky/6/1.jpg>
- [5] Úvod. In: *Autoprofiteam* [online]. Kdýňě: Autoprofiteam, 2010 [cit. 2017-05-10]. Dostupné z: <http://www.autoprofiteam.cz/article.php?artid=584>
- [6] Obrázek Testometric. In: *Testometric* [online]. Rochdale: Testometric, 2011 [cit. 2017-05-10]. Dostupné z: <http://www.testometric.co.uk/wp-content/uploads/2015/09/50kN.jpg>